Н. В. БУТЕНИН

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

Н. В. БУТЕНИН

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

531
Б 93
УДК 531.011

Введение в аналитическую механику. Бутенин Н. В., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971, 264 стр.

В книге дано систематическое и достаточно доступное изложение основ аналитической механики. В нее включены разделы: уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, теория Якоби, неголономные системы, вариационные принципы и теория возмущений. Приводятся многочисленные примеры, иллюстрирующие применение рассматриваемых методов.

Книга предназначена для студентов втузов, аспирантов и инженеров различных отраслей промышленности. Она является дополнением к «Курсу теоретической механики» (авт.: Бутенин Н. В. и др.).

Илл. 61. Библ. 12 назв.

Николай Васильевич Бутенин

Введение в аналитическую механику

М., 1971 г. 264 стр. с илл.

Редактор *Л. Г. Наумова*

Техн. редактор *А. П. Колесникова* Корректоры *Т. С. Плетнева, А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 23/VIII 1971 г. Подписано к печати 16/XI 1971 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 8,25. Условн. печ. л. 13,86. Уч.-изд. л. 13,11. Тираж 25 000 экз. Т-16862. Цена книги 56 коп. Заказ № 1231.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

2-4-2
104-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга входит в серию учебных пособий, дополняющую курс теоретической механики Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина (М., 1970—1971 г.). Издание этих дополнений связано с тем, что учащиеся некоторых втузов нуждаются в более подробном ознакомлении с рядом важнейших разделов, кроме изложенных в основном курсе. Книги, входящие в названную серию, посвящены аналитической механике, теории устойчивости, теории механических колебаний, теории гироскопов. В дальнейшем серию предполагается продолжить.

Эта книга предназначена для ознакомления учащихся с рядом разделов аналитической механики и ее методов, которые находят или могут найти приложение при решении инженерно-технических задач.

Цель настоящей книги — изложение методов аналитической механики и иллюстрация применения их к решению конкретных задач. Поэтому некоторые теоретические положения приводятся без доказательств, со ссылкой на источники, где эти доказательства приведены.

Автор благодарен профессорам Ю. И. Неймарку, Н. Н. Поляхову, Н. А. Фуфаеву и доценту Л. Г. Наумовой за ценные советы, которые позволили значительно улучшить содержание книги.

Автор

Ленинград,
апрель 1971 г.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1.1. Свободные и несвободные материальные системы. Связи и их классификация

Совокупность материальных точек называется системой материальных точек или материальной системой, если движение каждой из них в отдельности зависит от движения и положения остальных точек. Это значит, что между точками материальной системы существуют силы взаимодействия *).

Материальная система, для которой расстояния между двумя любыми ее точками не изменяются, называется *твердым телом.*

В данном курсе будет рассмотрено движение материальной системы в инерциальной системе отсчета.

Если каждая точка материальной системы может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую материальную систему называют *свободной.* Классическим примером свободной материальной системы может служить солнечная планетная система. Между всеми планетами и Солнцем существуют силы ньютоновского тяготения, положения же и скорости самих планет и Солнца ничем не ограничены.

Если вследствие каких-либо ограничений (условий) точки и тела, составляющие материальную систему, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости, то такая материальная система называется *несвободной.*

---

*) Напомним, что силы взаимодействия между точками материальной системы называются *внутренними* силами. Силы, действующие на точки материальной системы со стороны точек и тел, не принадлежащих данной системе, называются *внешними.*

Ограничения (условия), которые не позволяют точкам материальной системы занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, называются *связями*. Связь налагает ограничения на изменение координат и скоростей точек. Аналитически эти ограничения записываются в виде уравнений или неравенств.

Пусть материальная система состоит из n точек, а декартовыми координатами i-й точки будут x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если на материальную систему будет наложена одна связь, то в общем случае аналитически это можно записать в виде *)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots \\ \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leqslant 0, \qquad (1.1)$$

где $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) — проекции скорости i-й точки на оси декартовой системы координат, а t — время. В случае знака равенства в выражении (1.1) связь называется *удерживающей*; если стоит знак неравенства, то связь называется *неудерживающей*.

Пусть две материальные точки, положение которых определяется соответственно координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, связаны между собой жестким стержнем длиной l. В этом случае связь является удерживающей и ее уравнение имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

т. е. расстояние между этими точками все время остается неизменным.

Если же стержень заменить гибкой нерастяжимой нитью, то точки получат возможность сближаться, но, как и прежде, удалиться друг от друга на расстояние, большее l, не смогут. В этом случае связь будет неудерживающей и ограничения на координаты запишутся в виде неравенства

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 \leqslant 0.$$

---

*) Будем предполагать здесь и в дальнейшем, что функция f непрерывна и имеет непрерывные производные по всем аргументам.

В дальнейшем будут рассматриваться только удерживающие связи *).

Если уравнение удерживающей связи

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (1.2)$$

содержит явно время t, то связь называется *реономной* или *нестационарной.*

Примером такой связи может служить негибкий стержень, соединяющий две материальные точки и изменяющий свою длину l *заданным* образом, например, $l = l_1 + l_0 \sin t$. Уравнение связи в этом случае содержит время t и имеет вид

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (l_1 + l_0 \sin t)^2 = 0,$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты точек.

Если же уравнение связи не содержит времени t, т. е. уравнение связи имеет вид

$$f(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0,$$

то связь называется *склерономной* или *стационарной.*

Связь, накладывающая ограничения только на координаты точек системы, т. е. связь, уравнение которой не содержит производных от координат:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \qquad (1.3)$$

называется *геометрической* или *голономной.* Связь же, уравнение которой имеет вид (1.2), называется *кинематической.*

Если уравнение (1.2) кинематической связи путем интегрирования нельзя привести к виду (1.3), не содержащему производных, то эта связь называется *неголономной* или *неинтегрируемой.* Если же уравнение кинематической связи (1.2) может быть путем интегрирования приведено к виду (1.3), то связь, по существу, будет голономной.

*) При наличии неудерживающих связей движение материальной системы можно разбить на участки свободного и несвободного движения. Несвободного, когда в выражении (1.1) имеется знак равенства, и свободного, когда стоит знак неравенства.

Пусть, например, уравнением связи, наложенной на материальную систему, будет

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i) = 0.$$

После его интегрирования получим

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = c$$

(c — произвольная постоянная интегрирования). Следовательно, данная связь является геометрической.

Если на материальную систему наложено k связей, то будет k уравнений связи следующего вида:

$$f_j(x_i,\ y_i,\ z_i,\ \dot{x}_i,\ \dot{y}_i,\ \dot{z}_i,\ t) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Если эта система уравнений интегрируема, то связи будут голономными, в противном случае — неголономными.

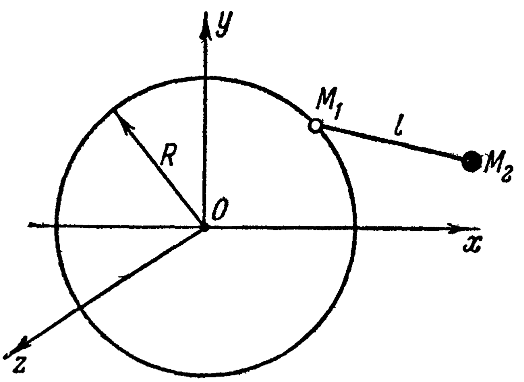

Рис. 1.1.

Материальная система, на которую наложены голономные связи, называется *голономной*, а материальная система с неголономными связями — *неголономной*.

В настоящей книге основное внимание уделено голономным системам, т. е. рассматриваются материальные системы, на которые наложены связи, уравнения которых могут быть записаны в форме

$$f_j(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{1.4}$$

где k — число связей.

Рассмотрим несколько примеров голономных связей.

Пример 1. Точка M_1, к которой присоединена на нерастяжимом стержне длиной l точка M_2, движется по дуге окружности радиуса R (рис. 1.1), расположенной в вертикальной плоскости. Обозначим координаты точки M_1 через x_1, y_1, z_1, а координаты точки M_2 через

x_2, y_2, z_2, тогда уравнениями связей будут

$$z_1 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Пример 2. Для точек M_1 и M_2 кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис. 1.2, уравнения связей имеют вид

$$z_1 = 0, \ z_2 = 0, \ y_2 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 = 0,$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — соответственно координаты точек M_1 и M_2.

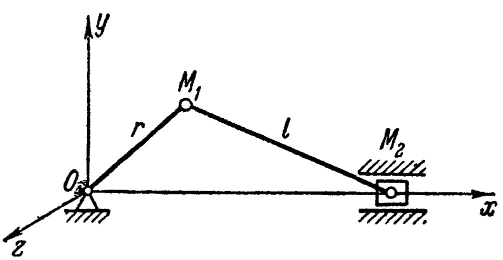

Рис. 1.2.

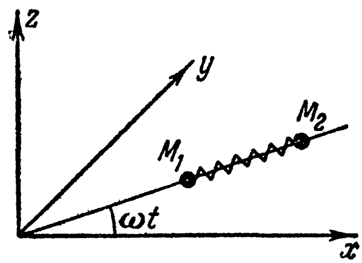

Рис. 1.3.

Пример 3. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. На стержне могут свободно двигаться две материальные точки M_1 и M_2, соединенные между собой пружиной (рис. 1.3).

В этом случае для системы точек M_1 и M_2 связь уже будет реономной (нестационарной), так как в уравнения связей

$$x_1 \sin \omega t - y_1 \cos \omega t = 0,$$

$$x_2 \sin \omega t - y_2 \cos \omega t = 0,$$

$$z_1 = 0, \ \ z_2 = 0$$

входит время t.

Числом степеней свободы голономной материальной системы называется число независимых параметров, полностью определяющих ее положение (конфигурацию), т. е. определяющих положение каждой точки системы.

Пусть на материальную систему, состоящую из n точек, наложено k связей вида (1.4). Это значит, что не все декартовы координаты точек системы независимы друг от друга. В самом деле, на $3n$ координат наложено k независимых уравнений связей. Решая эти уравнения связей относительно k каких-либо координат, мы выразим эти k координат через остальные $3n - k$. Эти $3n - k$

координат, которые могут принимать произвольные значения, и определяют положение точек системы. Таким образом, число степеней свободы будет равно

$$s = 3n - k. \tag{1.5}$$

Заметим, что решить систему (1.4) можно лишь относительно тех координат, для которых функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta_k} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_k} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial \beta_k} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

не равен нулю. В определителе (1.6) через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ обозначены те декартовы координаты, для которых этот определитель не равен нулю.

§ 1.2. Виртуальные скорости. Виртуальные перемещения

Понятия о виртуальных скоростях и виртуальных перемещениях точек материальной системы являются одним из фундаментальных понятий аналитической механики. Введем сначала эти понятия на примере одной материальной точки.

Предположим, что материальная точка подчинена связи, уравнение которой имеет вид

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1.7}$$

Пусть закон движения точки, обусловленный действующими на точку силами, будет

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.8}$$

Подставляя закон (1.8) в уравнение связи (1.7), получим тождество

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0. \tag{1.9}$$

После дифференцирования этого тождества по времени будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.10}$$

Предположим, что в какой-либо фиксированный момент времени $t = t_0$ материальная точка имеет координаты x_0, y_0, z_0. Для этого момента времени условие (1.10) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \dot{z} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0, \qquad (1.11)$$

где индекс 0 означает, что все четыре производные вычислены для значений x_0, y_0, z_0 и t_0. Производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$, входящие в условие (1.11), также соответствуют моменту времени $t = t_0$. Выражение (1.11) представляет собой условие, которому должны удовлетворять в данный момент времени $t = t_0$ проекции $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$ скорости точки

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}.$$

Эту скорость называют *действительной* скоростью.

Если связь стационарная, то ее уравнение имеет вид

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1.12)$$

и условие (1.11) упрощается:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \dot{y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \dot{z} = 0. \qquad (1.13)$$

Наряду с действительной скоростью точки введем в рассмотрение скорости

$$\boldsymbol{v}^* = \dot{x}^*\boldsymbol{i} + \dot{y}^*\boldsymbol{j} + \dot{z}^*\boldsymbol{k}, \qquad (1.14)$$

проекции которых в данный фиксированный момент времени удовлетворяют условию (1.13), т. е. тому же условию, которому удовлетворяют проекции действительной скорости при стационарной связи. Следовательно, если связь нестационарная, то введенные нами скорости $\boldsymbol{v}^*$ представляют собой в данный момент времени кинематически возможные скорости точки при мгновенно остановленной связи, т. е. $\boldsymbol{v}^*$ — это скорости, совместимые со связью, но не имеющие составляющих, обусловленных деформацией связи.

Такие скорости $\boldsymbol{v}^*$ будем называть *виртуальными* скоростями.

Поясним сказанное на простом примере.

Пусть материальная точка движется по какой-либо поверхности, которая в свою очередь перемещается в пространстве. Действительная скорость точки будет суммой двух составляющих: составляющей v^*, расположенной в касательной плоскости, проведенной к точке поверхности, где находится в данный момент времени материальная точка, и определяемой уравнением (1.14), и составляющей, обусловленной перемещением поверхности. Виртуальные же скорости будут расположены только в касательной плоскости.

Из сравнений условий (1.11) и (1.13) вытекает, что в случае нестационарной связи действительная скорость не совпадает с виртуальными скоростями. В случае же стационарной связи действительная скорость совпадает с одной из виртуальных скоростей.

Рассмотрим систему материальных точек, подчиненную k голономным нестационарным связям, описывающимся уравнениями

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.15}$$

Виртуальными скоростями такой системы называют скорости, проекции которых в данный момент времени удовлетворяют системе уравнений *)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i^* + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i^* + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i^*\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.16}$$

Проекции же действительных скоростей точек системы удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.17}$$

Это значит, что в случае нестационарных связей действительные скорости в общем случае не совпадают с виртуальными скоростями.

---

*) Для упрощения записи здесь и в дальнейшем индекс 0 опущен.

В случае стационарной связи уравнения (1.17) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{1.18}$$

совпадающий с уравнениями (1.16), т. е. в этом случае действительные скорости совпадают с одной из систем виртуальных скоростей.

Для материальной системы, состоящей из двух точек, соединенных между собой жестким стержнем длины l, уравнением связи будет

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0.$$

Условие (1.16) при этом запишется в виде

$$(x_2-x_1)\left(\dot{x}_2^*-\dot{x}_1^*\right)+(y_2-y_1)\left(\dot{y}_2^*-\dot{y}_1^*\right)+(z_2-z_1)\left(\dot{z}_2^*-\dot{z}_1^*\right)=0$$

или в векторной форме:

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\cdot\left(\boldsymbol{v}_2^*-\boldsymbol{v}_1^*\right)=0, \tag{1.19}$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы, определяющие положения точек. Равенство (1.19) выражает условие того, что разность виртуальных скоростей двух точек твердого тела всегда перпендикулярна к прямой, соединяющей эти точки. Для действительных скоростей этот факт известен из кинематики.

Действительным перемещением материальной точки называется вектор

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,dt. \tag{1.20}$$

Проекции этого вектора $dx=\dot{x}\,dt$, $dy=\dot{y}\,dt$ и $dz=\dot{z}\,dt$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0, \tag{1.21}$$

которое получается из уравнения (1.10) путем умножения его на dt.

Действительными перемещениями точек материальной системы называются векторы

$$d\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{v}_i\cdot dt=\dot{x}_i\,dt\,\boldsymbol{i}+\dot{y}_i\,dt\,\boldsymbol{j}+\dot{z}_i\,dt\,\boldsymbol{k} \qquad (i=1,\ 2\ \ldots,\ n). \tag{1.22}$$

Очевидно, что проекции этих векторов должны удовлетворять системе k уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\,dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\,dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\,dt=0$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{1.23}$$

Перейдем к определению понятия виртуального перемещения. Предположим, что точка находится на поверхности $f(x, y, z, t)=0$. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ в фиксированный момент времени t определяет положение точки. Рассмотрим теперь множество бесконечно близких положений точки, допускаемых связью в этот фиксированный момент времени. Пусть эти бесконечно близкие положения определяются радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}(t)+\delta\boldsymbol{r}=(x+\delta x)\,\boldsymbol{i}+(y+\delta y)\,\boldsymbol{j}+(z+\delta z)\,\boldsymbol{k},$$

где δx, δy, δz — проекции вектора $\delta\boldsymbol{r}$. Вектор

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta x\,\boldsymbol{i}+\delta y\,\boldsymbol{j}+\delta z\,\boldsymbol{k}$$

представляет собой бесконечно малое приращение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ при мысленном перемещении точки из положения, определяемого радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(t)$, в положение, определяемое радиусом-вектором $\boldsymbol{r}'(t)$. Этот вектор называется *вектором виртуального перемещения*. Таким образом, вектор виртуального перемещения представляет собой бесконечно малый вектор, который позволяет мысленно, не нарушая связи, перевести точку из одного ее положения в бесконечно близкое, относящееся к тому же моменту времени. Вектор $\delta\boldsymbol{r}$ иначе называют вариацией вектора $\boldsymbol{r}$, а его проекции δx, δy, δz — вариациями координат.

Проекции $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ векторов $\boldsymbol{r}'(t)$ должны удовлетворять уравнению связи (1.7), т. е.

$$f(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z,\ t)=0.$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням δx, δy, δz, учитывая, что $f(x, y, z, t)=0$, и пренебрегая членами порядка малости выше первого, получаем условие, накладывающее ограничение на вариации координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z=0. \tag{1.24}$$

Поскольку при получении выражения (1.24) время считается фиксированным, то вариации δx, δy, δz называются *изохронными*. Пусть τ — коэффициент, имеющий размерность времени; тогда, умножая почленно уравнение (1.13) на этот коэффициент τ и вводя обозначения

$$\tilde{\delta} x = \dot{x}^* \tau, \quad \tilde{\delta} y = \dot{y}^* \tau, \quad \tilde{\delta} z = \dot{z}^* \tau,$$

получим

$$\frac{\partial f}{\partial x} \tilde{\delta} x + \frac{\partial f}{\partial y} \tilde{\delta} y + \frac{\partial f}{\partial z} \tilde{\delta} z = 0.$$

Следовательно, проекции вектора

$$\tilde{\delta} \boldsymbol{r} = \tilde{\delta} x\, \boldsymbol{i} + \tilde{\delta} y\, \boldsymbol{j} + \tilde{\delta} z\, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}^* \tau$$

удовлетворяют условию (1.24). Если теперь выбрать коэффициент τ таким, чтобы перемещения $\tilde{\delta} \boldsymbol{r}$ были совместимы со связью (τ должно иметь порядок малости не меньше порядка малости величин δx, δy, δz), то, поскольку величины $\tilde{\delta} x$, $\tilde{\delta} y$, $\tilde{\delta} z$ удовлетворяют условию (1.24), векторы $\tilde{\delta} \boldsymbol{r}$ будут представлять собой виртуальные перемещения, т. е. $\tilde{\delta} \boldsymbol{r} = \delta \boldsymbol{r}$. Из соотношения $\tilde{\delta} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}^* \tau$ следует, что векторы виртуальных перемещений имеют направления виртуальных скоростей.

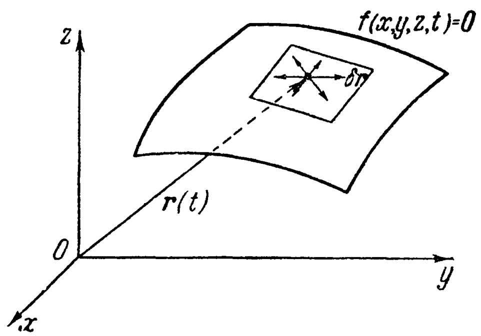

Рис. 1.4.

Если связь, которой подчинено движение материальной точки, стационарная, то проекции (dx, dy, dz) действительного перемещения $d\boldsymbol{r}$ удовлетворяют, в соответствии с (1.21), уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

т. е. в этом случае вектор действительного перемещения совпадает с одним из виртуальных перемещений.

Условию (1.24) можно дать геометрическую интерпретацию. Уравнение связи $f(x, y, z, t) = 0$ в фиксированный момент времени можно рассматривать как уравнение поверхности. Тогда из условия (1.24) вытекает, что

виртуальные перемещения точки $\delta\boldsymbol{r}$ представляют собой векторы, расположенные в касательной плоскости, проведенной в той точке поверхности, в которой в данный (фиксированный) момент времени находится материальная точка (рис. 1.4).

Виртуальными перемещениями точек материальной системы, подчиненной k связям вида (1.15), называют совокупность бесконечно малых векторов

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta x_i \boldsymbol{i} + \delta y_i \boldsymbol{j} + \delta z_i \boldsymbol{k}, \tag{1.25}$$

проекции которых удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.26}$$

Отметим, что при стационарных связях в соответствии с условием (1.23), проекции действительных перемещений удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.27}$$

Это значит, что для стационарных связей действительные перемещения совпадают с одним из виртуальных перемещений. Материальная система, состоящая из n точек, имеет $3n$ вариаций координат. Однако в силу уравнений (1.26) эти вариации координат не являются независимыми друг от друга. Решая уравнения (1.26) относительно k вариаций координат, для которых это решение возможно, мы их выразим через остальные $3n - k$. Следовательно, независимых вариаций координат будет $3n - k$, т. е. число независимых вариаций координат равно числу степеней свободы материальной системы.

§ 1.3. Виртуальная работа. Признак идеальности связей

Если на точки материальной системы в данном положении и в фиксированный момент времени действует система сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, а виртуальные перемещения точек системы равны $\delta\boldsymbol{r}_1, \delta\boldsymbol{r}_2, \ldots, \delta\boldsymbol{r}_n$, то *виртуальной ра-*

ботой называется работа этих сил на виртуальных перемещениях системы, т. е.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i, \qquad (1.28)$$

или

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i). \qquad (1.29)$$

Определим понятие идеальных связей. *Идеальными связями* называются такие связи, для которых виртуальная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \qquad (1.30)$$

где $\boldsymbol{R}_i$ — реакция связи, приложенная к i-й точке.

Определение идеальной связи, известное из курса теоретической механики, как связи, реакция которой не содержит составляющей обусловленной трением, является частным случаем приведенного выше определения.

Воспользуемся условием (1.30) для выражения реакций связей, используя неопределенные множители Лагранжа.

Записав условие (1.30) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0, \qquad (1.31)$$

вспомним, что вариации координат δx_i, δy_i, δz_i (в соответствии с (1.26)) подчинены уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \quad (1.32)$$

Каждое из этих k уравнений умножим соответственно на неопределенные множители Лагранжа λ_1, λ_2, ..., λ_k, которые могут быть функциями координат и времени:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Полученные выражения сложим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\delta x_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right] = 0. \quad (1.33)$$

Вычтя теперь из соотношения (1.31) выражение (1.33), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\delta x_i\left(R_{xi} - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) + \delta y_i\left(R_{yi} - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right) + \right.$$
$$\left. + \delta z_i\left(R_{zi} - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)\right] = 0. \quad (1.34)$$

Так как в силу уравнений (1.32) независимых вариаций координат будет $3n - k$, то выберем множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ таким образом, чтобы коэффициенты при k вариациях координат обращались в нуль. Оставшиеся в выражении (1.34) $3n - k$ вариации координат будут независимы, и поэтому множители при них также должны быть равны нулю *). Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} R_{xi} &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ R_{yi} &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ R_{zi} &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}. \end{aligned}\right\} \quad (1.35)$$

Приведем примеры идеальных связей.

Пример 4. Связь между двумя материальными точками M_1 и M_2 осуществлена в виде абсолютно жесткого стержня (рис. 1.5).

Пусть $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ — соответственно реакции связей, приложенных к точкам M_1 и M_2. Если $\overset{*}{\boldsymbol{v}}_1$ и $\overset{*}{\boldsymbol{v}}_2$ — виртуальные скорости соответ-

---

*) Обоснование возможности такого подбора λ_j дано, например, в книге: Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944, стр. 295.

ственно точек M_1 и M_2, то виртуальные перемещения этих точек будут равны

$$\delta \boldsymbol{r}_1 = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_1 \tau \quad \text{и} \quad \delta \boldsymbol{r}_2 = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_2 \tau.$$

Работа реакций на виртуальных перемещениях точек

$$\boldsymbol{R}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{R}_1 \cdot \left(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_1 - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_2\right) \tau = 0,$$

так как $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{R}_1$; реакция $\boldsymbol{R}_1$ направлена вдоль стержня, а разность $\overset{*}{\boldsymbol{v}}_1 - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_2$ перпендикулярна к направлению стержня [см. формулу (1.13)].

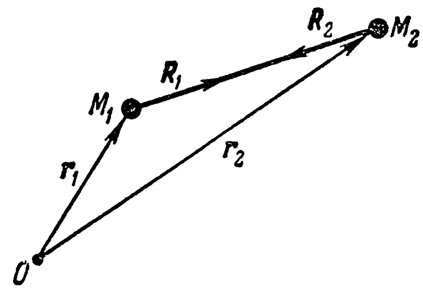

Рис. 1.5.

Пример 5. Точка движется по внутренней стороне абсолютно гладкой поверхности параболоида вращения

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - az = 0.$$

По условию поверхность абсолютно гладкая, следовательно, реакция направлена по нормали к поверхности, но виртуальные перемещения расположены в касательной плоскости. Значит, реакция $\boldsymbol{R}$ перпендикулярна к $\delta \boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$. Приведем другое доказательство, с использованием множителя Лагранжа. Так как реакция направлена по нормали к поверхности, то можно записать

$$\frac{R_x}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

или

$$\frac{R_x}{2x} = \frac{R_y}{2y} = \frac{R_z}{-a} = \lambda.$$

Отсюда имеем $R_x = \lambda 2x$, $R_y = \lambda 2y$, $R_z = -\lambda a$. Тогда

$$\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = R_x \, \delta x + R_y \, \delta y + R_z \, \delta z = \lambda \, (2x \, \delta x + 2y \, \delta y - a \, \delta z) = 0,$$

так как на основании уравнения связи вариации координат δx, δy и δz удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$2x \, \delta x + 2y \, \delta y - a \, \delta z = 0.$$

В дальнейшем будут рассматриваться только идеальные связи.

§ 1.4. Обобщенные координаты. Обобщенные силы

В § 1.1 было установлено, что положение материальной системы, подчиненной k голономным связям, определяется $s = 3n - k$ независимыми декартовыми координатами. Однако во многих случаях использование декартовых координат приводит к громоздким выкладкам. Поэтому для определения положения материальной системы можно использовать другие независимые друг от друга параметры $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Эти параметры могут иметь различную размерность — это могут быть углы, длины дуг, площади и т. п. Все $3n$ декартовых координат можно выразить через введенные параметры $q_1, q_2, \ldots, q_s$:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.36}$$

Эти функции обращают в тождество уравнения связей

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Будем предполагать, что любое положение материальной системы, совместимое со связями, однозначно определяется при помощи функций (1.36) некоторыми значениями параметров $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Эти независимые между собой параметры $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (s — число степеней свободы) называются *обобщенными координатами.*

Уравнения (1.36) могут быть записаны в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t). \tag{1.37}$$

При наличии стационарных связей функции (1.36) можно выбрать так, чтобы они не содержали явно времени t, т. е. имели вид

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.38}$$

При этом радиусы-векторы точек системы также будут функциями только обобщенных координат:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.39)$$

Пример 6. Положение сферического маятника длины l можно определить двумя углами $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$ (рис. 1.6).

Уравнения (1.38) в этом случае имеют вид

$$x = l \sin\theta\cos\varphi = l \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = l \sin\theta\sin\varphi = l \sin q_1 \sin q_2,$$

$$z = l \cos\theta = l \cos q_1.$$

Дифференциалы от функций (1.36), вычисленные в предположении, что время t фиксировано, имеют вид

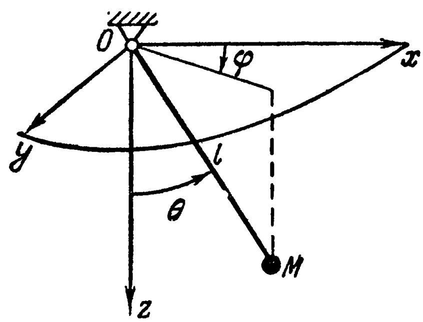

Рис. 1.6.

$$\tilde{d}x_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m,$$

$$\tilde{d}y_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m,$$

$$\tilde{d}z_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\tilde{d}q_m.$$

Найдем дифференциалы при фиксированном t от тождеств, которые получаются из уравнений связей после подстановки в них функций (1.36):

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\tilde{d}x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\tilde{d}y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\tilde{d}z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Полученные уравнения совпадают с уравнениями (1.26). Следовательно, дифференциалы $\tilde{d}x_i$, $\tilde{d}y_i$, $\tilde{d}z_i$ совпадают с вариациями координат δx_i, δy_i, δz_i.

Таким образом, мы установили «рецептуру» вычисления вариаций координат. Как для стационарной связи,

так и для нестационарной вариации координат будем вычислять по формулам

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\,\delta q_m, \\ \delta y_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\,\delta q_m, \\ \delta z_i &= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\,\delta q_m. \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

Здесь

$$\delta q_m = \tilde{d} q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

называются *вариациями обобщенных координат.*

В соответствии с выражениями (1.37) и (1.40) для виртуальных перемещений будем иметь

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\,\delta q_m. \tag{1.41}$$

Подставляя соотношение (1.41) в выражение для виртуальной работы

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i,$$

получим

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\,\delta q_m.$$

Внося $\boldsymbol{F}_i$ под знак второй суммы и меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} \delta q_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}.$$

Суммы

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right) \quad (m = 1, 2, \ldots, s) \quad (1.42)$$

называются *обобщенными силами*. Каждой обобщенной координате q_m соответствует своя обобщенная сила Q_m *). Итак

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m \delta q_m = Q_1 \delta q_1 +$$
$$+ Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_m \delta q_m. \quad (1.43)$$

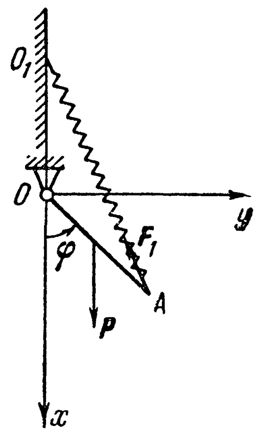

Рис. 1.7.

Выражение (1.43) позволяет дать следующее определение обобщенных сил: *обобщенными силами называются коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.*

Пример 7. Однородный стержень OA, вес которого P, может вращаться вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси Oz без трения (рис. 1.7). К концу A стержня прикреплена пружина $O_1A = l$. Точка O_1 крепления пружины находится от точки O по вертикали вверх на расстоянии, причем $O_1O = OA = r$. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Найти обобщенную силу.

За обобщенную координату примем угол φ. Тогда будем иметь

$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi,$$
$$x_C = \frac{r}{2}\cos\varphi, \qquad y_C = \frac{r}{2}\sin\varphi,$$

где x_c, y_c — координаты центра тяжести стержня. Сила, действующая на конец стержня A со стороны пружины, равна

$$F_1 = c\,|\,l - l_0\,|,$$

*) Отметим, что размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность обобщенной координаты.

где

$$l = 2r\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Проекциями этой силы на оси координат будут

$$X_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\cos\frac{\varphi}{2}, \quad Y_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Проекциями силы $\boldsymbol{P}$, приложенной в центре тяжести C стержня, будут

$$X_2 = P, \quad Y_2 = 0.$$

В нашем случае

$$Q = X_1\frac{\partial x_A}{\partial\varphi} + Y_1\frac{\partial y_A}{\partial\varphi} + X_2\frac{\partial x_C}{\partial\varphi} + Y_2\frac{\partial y_C}{\partial\varphi}.$$

В силу того, что

$$\frac{\partial x_A}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y_A}{\partial\varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial x_C}{\partial\varphi} = -\frac{r}{2}\sin\varphi,$$

получим

$$Q = cr\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{Pr}{2}\sin\varphi.$$

Пример 8. Найти обобщенные силы для сферического маятника (рис. 1.6). В данном случае $n = 1$, $s = 2$. Обобщенные координаты: $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. Обобщенные силы определяются формулами (1.42):

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial\theta} + Y\frac{\partial y}{\partial\theta} + Z\frac{\partial z}{\partial\theta},$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial\varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial\varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Так как $X = Y = 0$, $Z = P$, а

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \quad y = l\sin\theta\sin\varphi, \quad z = l\cos\theta$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -l\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0,$$

то

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Определим теперь обобщенные силы через виртуальную работу

$$\delta A = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = P\,\delta z.$$

Так как

$$\delta z = -l\sin\theta\,\delta\theta,$$

то

$$\delta A = -Pl\sin\theta\,\delta\theta$$

и, следовательно,

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Пример 9. Найти обобщенные силы для материальной системы, схема которой представлена на рис. 1.8. Веса грузов A, B и C соответственно равны $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$. Грузы A, B перемещаются по гладкой горизонтальной поверхности. Стержни невесомы и соединены с грузами A, B и между собой идеальными цилиндрическими шарнирами. Жесткости пружин c_1 и c_2.

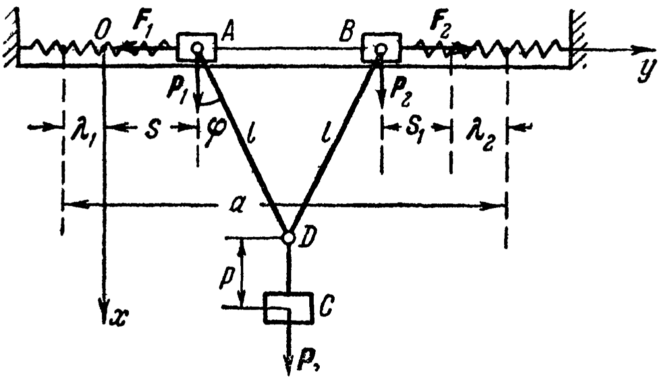

Рис. 1.8.

Выберем начало координат O в положении равновесия груза A.

Для определения числа степеней свободы рассматриваемой механической системы применим формулу $s = 3n - k$. Пусть координаты точек A, B и C соответственно будут x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3. Напишем уравнения связей:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$
$$[(x_3 - p) - x_1]^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$
$$[(x_3 - p) - x_2]^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - l^2 = 0.$$

Число точек в системе $n = 3$, число связей $k = 7$, следовательно, число степеней свободы $s = 2$. За обобщенные координаты примем $q_1 = s$, $q_2 = \varphi$ (см. рис. 1.8). Координатами грузов A, B и C будут

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = s,$$
$$x_2 = 0, \qquad y_2 = s + 2l\sin\varphi,$$
$$x_3 = l\cos\varphi + p, \quad y_3 = s + l\sin\varphi.$$

Проекции активных сил $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, действующих на грузы, равны

$$X_1 = P_1, \quad Y_1 = -c_1(s + \lambda_1),$$
$$X_2 = P_2, \quad Y_2 = c_2(s_1 + \lambda_2) = c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\cos\varphi),$$
$$X_3 = P_3, \quad Y_3 = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — статические удлинения пружин.

Найдем виртуальную работу

$$\delta A = X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + X_3\,\delta x_3 + Y\,\delta y_3.$$

Так как

$$\delta x_1 = 0,\quad \delta y_1 = \delta s,\quad \delta x_2 = 0,\quad \delta y_2 = \delta s + 2l\cos\varphi\,\delta\varphi,$$
$$\delta x_3 = -l\sin\varphi\,\delta\varphi,\quad \delta y_3 = \delta s + l\cos\varphi\,\delta\varphi,$$

то

$$\delta A = -c_1(s+\lambda_1)\,\delta s + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi)(\delta s + 2l\cos\varphi\,\delta\varphi) -$$
$$- P_3 l\sin\varphi\,\delta\varphi = [-c_1(s+\lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi)]\,\delta s +$$
$$+ [c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi)\,2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi]\,\delta\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_1 = -c_1(s+\lambda_1) + c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi),$$
$$Q_2 = c_2(a - s - \lambda_1 - 2l\sin\varphi)\,2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi.$$

ГЛАВА 2

ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 2.1. Принцип виртуальных перемещений

Принцип виртуальных перемещений является принципом механики, устанавливающим необходимые и достаточные условия равновесия (покоя) материальной системы.

Пусть материальная система подчинена k голономным стационарным связям

$$f_j = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Дифференциальные уравнения движения этой несвободной системы имеют вид

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

где i — номер точки, $\boldsymbol{w}_i$ — ее ускорение, m_i — масса, $\boldsymbol{F}_i$ и $\boldsymbol{R}_i$ — соответственно равнодействующие всех активных сил и реакций связей, приложенных к i-й точке.

Под равновесием (покоем) материальной системы будем понимать такое ее положение, в котором система будет находиться все время, если она в начальный момент времени, имея скорости, равные нулю, находилась в этом положении. Отсюда следует, что в положении равновесия материальной системы скорости и ускорения всех ее точек равны нулю, т. е.

$$\boldsymbol{v}_i = 0, \qquad \boldsymbol{w}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или, в соответствии с уравнениями (2.1),

$$\boldsymbol{v}_i = 0, \qquad \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.2}$$

Сформулируем теперь принцип виртуальных перемещений.

Необходимым и достаточным условием равновесия голономной материальной системы, подчиненной только идеальным связям, является равенство нулю работы всех активных сил на любом виртуальном перемещении точек материальной системы, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0. \tag{2.3}$$

Кроме того, в соответствии с определением равновесия $v_i(t_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *где* t_0 — *начальный момент времени.*

Докажем необходимость этого условия. Пусть система находится в положении равновесия. Это значит, что выполняются условия (2.2). Умножим скалярно второе выражение этого условия на вектор виртуального перемещения i-й точки:

$$\delta \boldsymbol{r}_i \cdot (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) = 0.$$

Это выражение справедливо для любой точки материальной системы. Складывая все эти выражения, получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

Так как по предположению связи, наложенные на систему, идеальные, то $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

Скорости же всех точек равны нулю по предположению.

Докажем, что условие (2.3) будет и достаточным условием равновесия системы.

Очевидно, для этого достаточно показать, что уравнения (2.2) являются следствием условия (2.3). Запишем

условие (2.3) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i\,\delta x_i + Y_i\,\delta y_i + Z_i\,\delta z_i) = 0, \tag{2.4}$$

где X_i, Y_i, Z_i — проекции силы $\boldsymbol{F}_i$ на оси координат. Вариации координат δx_i, δy_i, δz_i подчинены k уравнениям (1.26):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Умножая эти уравнения соответственно на неопределенные множители Лагранжа λ_1, λ_2, ..., λ_k и складывая затем полученные выражения, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta x_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \delta y_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} + \delta z_i \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Складывая соотношения (2.4) и (2.5), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(Y_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \right.$$
$$\left. + \left(Z_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right] = 0.$$

Выбираем теперь λ_j так, чтобы коэффициенты при k вариациях координат обратились в нуль; тогда обратятся в нуль и коэффициенты при остальных $3n - k$ вариациях в силу независимости этих последних. Следовательно, мы получим уравнения

$$X_i + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0,$$

$$Y_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0,$$

$$Z_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0,$$

или, с учетом формул (1.35),

$$X_i + R_{ix} = 0, \quad Y_i + R_{iy} = 0, \quad Z_i + R_{iz} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Умножая каждое из этих уравнений соответственно на единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ координатных осей x, y и z и складывая полученные выражения между собой, будем иметь

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. уравнения (2.2). Начальные же скорости равны нулю по условию (2.3)*).

Принцип виртуальных перемещений позволяет определить положение равновесия несвободной материальной системы, не вводя в рассмотрение неизвестных реакций идеальных связей, так как в формулировку этого принципа эти реакции не входят.

Однако принцип виртуальных перемещений может быть применен и для нахождения реакций идеальных связей. Для этого, в соответствии с принципом освобождаемости, следует отбросить связь и заменить ее действие реакцией, а затем включить эту реакцию в число активных сил. При этом следует помнить, что при отбрасывании связи увеличивается число степеней свободы системы.

Если наложенные на систему связи не идеальные, то непосредственно принцип виртуальных перемещений к таким системам неприменим. Однако в этом случае, например при движении точек по негладким поверхностям, следует реакции разложить на нормальные составляющие и силы трения. Далее принять, что связи идеальные, а силы трения отнести к активным силам. Конечно, при этом сле-

*) Рассмотрение различных доказательств достаточности условия (2.3) приведено в книге Г. К. Суслова «Теоретическая механика», Гостехиздат, 1944, стр. 377—384.

дует учитывать условия равновесия при наличии трения *).

Пример 10. Тяжелый однородный стержень длины $2l$ опирается промежуточной точкой на выступ B. Другой конец стержня удерживается невесомой нитью длины l, прикрепленной к точке O (рис. 2.1). Дано: $OA = OB = l$. Найти угол φ, образуемый стержнем с горизонтальной линией при равновесии. Стержень считать гладким, точки O и B находятся на одной горизонтали.

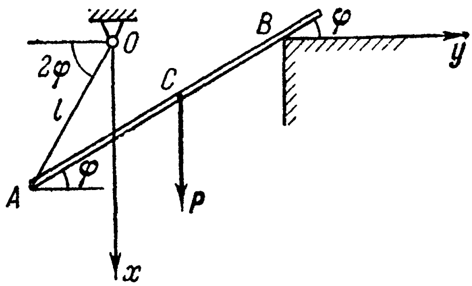

Рис. 2.1.

Активная сила здесь одна — вес стержня $\boldsymbol{P}$, приложенный в центре тяжести стержня C. Согласно формуле (2.3) условием равновесия стержня будет

$$\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{r}_C = P\,\delta x_C = 0 \quad \text{или} \quad \delta x_C = 0.$$

Так как

$$x_C = l\sin 2\varphi - l\sin\varphi,$$

то

$$\delta x_C = l\,(2\cos 2\varphi - \cos\varphi)\,\delta\varphi = 0.$$

Поскольку $\delta\varphi$ выбирается произвольно, можно считать $\delta\varphi \neq 0$, и, следовательно,

$$2\cos 2\varphi - \cos\varphi = 0,$$

или

$$4\cos^2\varphi - \cos\varphi - 2 = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}842.$$

Пример 11. Определить реакцию опоры C трехпролетной разрезной балки (рис. 2.2, *а*).

Заменим действие опоры C реакцией $\boldsymbol{R}_C$. На рис. 2.2, *б* показано одно из виртуальных перемещений системы. Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\boldsymbol{P}_1\cdot\delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{R}_C\cdot\delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{P}_2\cdot\delta\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{P}_3\cdot\delta\boldsymbol{r}_3 =$$
$$= P_1|\delta\boldsymbol{r}_1| - R_C|\delta\boldsymbol{r}_C| + P_2|\delta\boldsymbol{r}_2| - P_3|\delta\boldsymbol{r}_3| = 0, \qquad (2.6)$$

где $\delta\boldsymbol{r}_1$, $\delta\boldsymbol{r}_2$, $\delta\boldsymbol{r}_3$, $\delta\boldsymbol{r}_C$ — виртуальные перемещения точек балки, к которым приложены силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ и реакция $\boldsymbol{R}_C$. Поскольку мы отбросили опору C, балка получила одну степень свободы. Положение балки теперь можно определить углом φ поворота левой части балки вокруг точки A (в положении равновесия $\varphi = 0$). При сообщении балке, находящейся в равновесии, выбранного виртуального

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1970, стр. 82—90.

перемещения величины $|\delta r_1|$, $|\delta r_2|$, $|\delta r_3|$ и $|\delta r_C|$ можно заменить через вариацию $\delta\varphi$ угла φ по следующим соотношениям (см. рис. 2.2, *б*):

$$|\delta r_1| = \frac{l}{2}\,\delta\varphi, \quad |\delta r_C| = l\,\delta\varphi, \quad |\delta r_2| = \frac{5}{4}\,l\,\delta\varphi, \quad |\delta r_3| = \frac{l}{4}\,\delta\varphi_1 = \frac{3}{4}\,l\,\delta\varphi,$$

так как в соответствии с рисунком $\frac{3}{2}\,l\,\delta\varphi = \frac{l}{2}\,\delta\varphi_1$ и, следовательно, $\delta\varphi_1 = 3\,\delta\varphi$.

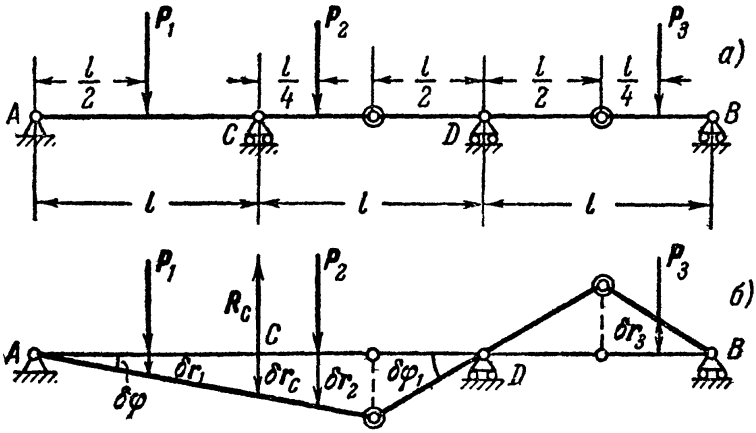

Рис. 2.2.

Подставляя полученные соотношения в уравнение (2.6), имеем

$$\left(\frac{1}{2}\,P_1 - R_C + \frac{5}{4}\,P_2 - \frac{3}{4}\,P_3\right) l\,\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi$ выбирается произвольно, то можно принять $\delta\varphi \neq 0$. Тогда

$$2P_1 - 4R_C + 5P_2 - 3P_3 = 0$$

и

$$R_C = \frac{2P_1 + 5P_2 - 3P_3}{4}.$$

Пример 12. При каком соотношении между весами P_1, P_2, P_3 и P_4 грузов *A*, *B*, *C* и *D* система, изображенная на рис. 2.3, будет находиться в равновесии? Нить невесома и нерастяжима. Трением пренебречь.

Пусть величины s_1, x_2, x_3, s_4 определяют положение грузов *A*, *B*, *C*, *D*. На основании принципа виртуальных перемещений можно написать условие равновесия

$$P_1 \sin\alpha\,\delta s_1 + P_2\,\delta x_2 + P_3\,\delta x_3 + P_4 \sin\beta\,\delta s_4 = 0.$$

Из условия нерастяжимости нити получаем

$$s_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_4 = \mathrm{const}.$$

Отсюда

$$\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3 + \delta s_4 = 0,$$

т. е. четыре величины δs_1, δx_2, δx_3, δs_4 связаны между собой одним уравнением, следовательно, три из них могут принимать независимые

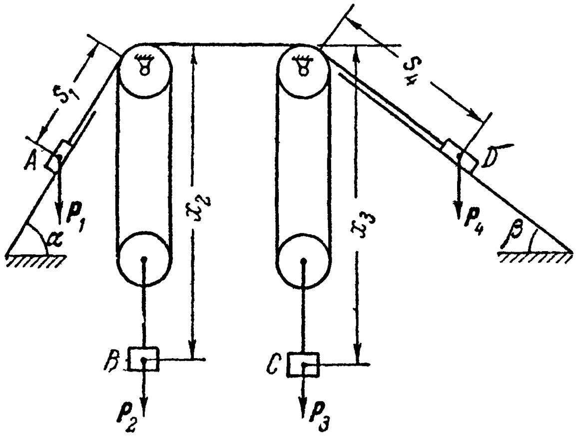

Рис. 2.3.

друг от друга значения, а четвертая определится из полученного соотношения. Пусть это будет

$$\delta s_4 = -(\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3).$$

Подставляя это выражение в условие равновесия, получим

$$(P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta)\,\delta s_1 + (P_2 - 2P_4 \sin\beta)\,\delta x_2 + (P_3 - 2P_4 \sin\beta)\,\delta x_3 = 0.$$

Так как δs_1, δx_2, δx_3 независимы между собой и могут принимать различные значения, то полученное равенство может быть выполнено лишь при условии

$$\begin{aligned} P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta &= 0, \\ P_2 - 2P_4 \sin\beta &= 0, \\ P_3 - 2P_4 \sin\beta &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$P_2 = P_3, \quad P_1 \sin\alpha = P_4 \sin\beta.$$

§ 2.2. Принцип виртуальных перемещений в обобщенных координатах

Как было установлено в § 2.1, необходимым и достаточным условием равновесия голономной стационарной материальной системы при наличии только идеальных

связей является условие (2.3):

$$v_i(t_0)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n), \quad \delta A=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,$$

где $\boldsymbol{F}_i$ — активные силы.

В обобщенных координатах второе выражение условия (2.3), в соответствии с равенством (1.43), имеет вид

$$Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\ldots+Q_s\delta q_s=0.$$

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ могут принимать любые значения независимо друг от друга, то полученное соотношение может быть выполнено, если все обобщенные силы одновременно будут равны нулю, т. е.

$$Q_1=0, \ Q_2=0, \ \ldots, \ Q_s=0,$$

или

$$Q_m=0 \qquad (m=1,2,\ldots,s). \tag{2.7}$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования положения равновесия голономной стационарной системы, подчиненной идеальным связям, является равенство нулю скоростей всех точек системы и равенство нулю всех обобщенных сил.

Пример 13. В рассмотренном в § 1.4 примере 7 (рис. 1.7) обобщенная сила имела выражение

$$Q=cr\left(2r\cos\frac{\varphi}{2}-l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2}-\frac{Pr}{2}\sin\varphi$$

или

$$Q=r\left[c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2}-l_0\right)-P\cos\frac{\varphi}{2}\right]\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Приравнивая это выражение нулю, найдем значение угла φ, при котором система может находиться в равновесии:

$$r\left[c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2}-l_0\right)-P\cos\frac{\varphi}{2}\right]\sin\frac{\varphi}{2}=0.$$

Отсюда

$$\sin\frac{\varphi}{2}=0, \quad \text{т. е.} \ \varphi_1=0,$$

или, если $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$,

$$c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2}-l_0\right)-P\cos\frac{\varphi}{2}=0,$$

и окончательно

$$\cos\frac{\varphi_2}{2}=\frac{cl_0}{2rc-P}.$$

Однако это состояние равновесия будет существовать, если

$$\frac{cl_0}{|2rc-P|}<1,$$

т. е. при $P<c(2r-l_0)$ или $P>c(2r+l_0)$ будет еще состояние равновесия (кроме $\varphi_1=0$)

$$\varphi_2=2\arccos\frac{cl_0}{2rc-P}.$$

Пример 14. В примере 9 для рассмотренной материальной системы обобщенные силы равны

$$Q_1=-c_1(s+\lambda_1)+c_2(a-s-\lambda_1-2l\sin\varphi),$$

$$Q_2=c_2(a-s-\lambda_1-2l\sin\varphi)\,2l\cos\varphi-P_3l\sin\varphi.$$

При равновесии $s=0$, $\varphi=\varphi_0$ и, следовательно,

$$-c_1\lambda_1+c_2(a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0)=0,$$

$$c_2(a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0)\,2l\cos\varphi_0-P_3\,l\sin\varphi_0=0.$$

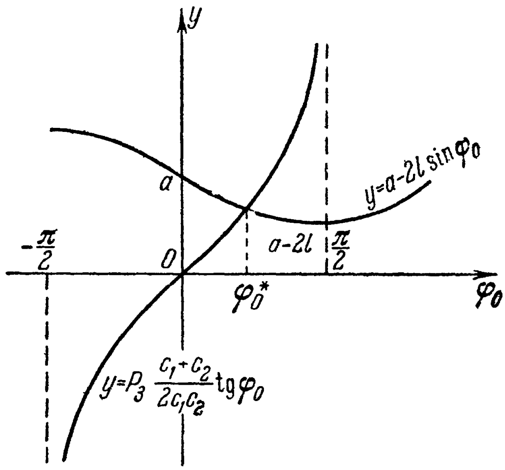

Рис. 2.4.

Отсюда следует, что $\lambda_1=\dfrac{c_2(a-2l\cos\varphi_0)}{c_1+c_2}$, а так как

$$a=\lambda_1+\lambda_2+2l\sin\varphi_0,$$

то

$$\lambda_2=\frac{c_1(a-2l\sin\varphi_0)}{c_1+c_2}.$$

Уравнение для определения φ_0 имеет вид

$$2c_1c_2\cos\varphi_0\,(a-2l\sin\varphi_0)-(c_1+c_2)\,P_3\sin\varphi_0=0.$$

Представив это выражение в виде

$$a-2l\sin\varphi_0=P_3\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0,$$

построим на плоскости φ_0y две кривые (рис. 2.4):

$$y=a-2l\sin\varphi_0 \quad\text{и}\quad y=P_3\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0.$$

Точки пересечения этих кривых и дают искомые значения φ_0. Очевидно, при $0 < \varphi_0 < \pi/2$ будет только одна точка пересечения, соответствующая единственному положению равновесия системы. Если $P_3 = 0$, то уравнением для определения φ_0 будет

$$\cos\varphi_0(a - 2l\sin\varphi_0) = 0.$$

Отсюда $\cos\varphi_0 = 0$, т. е. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Это значит, что существует положение равновесия, когда стержни горизонтальны. Но если $a < 2l$, то может быть

$$a - 2l\sin\varphi_0 = 0,$$

т. е.

$$\sin\varphi_0 = \frac{a}{2l}.$$

Следовательно, при $a > 2l$ возможно (при $P_3 = 0$) одно положение равновесия $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. При $a < 2l$ — два: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_0 = \arcsin\frac{a}{2l}$.

§ 2.3. Случай консервативных сил

Если силы, действующие на точки голономной стационарной системы, консервативные, то выполняются соотношения

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}, \tag{2.8}$$

где $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ — потенциальная энергия.

Подставляя (2.8) в формулу для обобщенной силы (1.42) и приняв во внимание (1.36), получим

$$Q_m = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.9}$$

Таким образом, если силы консервативны, то обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_m, равна взятой с обратным знаком производной от потенциальной энергии по обобщенной координате.

Условие (2.7) в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет экстремальное значение.

Пример 15. Найти обобщенную силу и положение равновесия материальной системы, схема которой представлена на рис. 2.5. В точках O, A и B имеются шарниры. Стержни OA и AB однородные и имеют одинаковую длину a и массу m. Поршень M имеет массу m_1. Середины стержней OA и AB соединены пружиной жесткости c. Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_0 < a$. Трением и массой пружины пренебречь. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

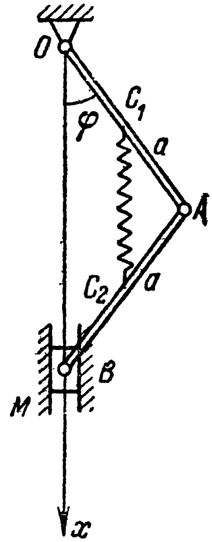

Рис. 2.5.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем $q = \varphi$.

Потенциальная энергия будет

$$\Pi = -mgx_{C_1} - mgx_{C_2} - m_1 g x_B + \frac{1}{2} c\lambda^2,$$

где

$$x_{C_1} = \frac{a}{2}\cos\varphi, \quad x_{C_2} = \frac{3}{2} a\cos\varphi, \quad x_B = 2a\cos\varphi,$$

а $\lambda = C_1C_2 - l_0$ — удлинение пружины (C_1 и C_2 — точки крепления пружины). Так как $C_1C_2 = a\cos\varphi$, то $\lambda = a\cos\varphi - l_0$. Следовательно,

$$\Pi = -2(m + m_1)\, ga\cos\varphi + \frac{1}{2} c\,(a\cos\varphi - l_0)^2.$$

Дифференцируя по φ, получим

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 2(m_1 + m)\, ga\sin\varphi - ac\,(a\cos\varphi - l_0)\sin\varphi$$

и обобщенная сила будет

$$Q = -\frac{d\Pi}{d\varphi} = -2(m + m_1)\, ga\sin\varphi + ac\,(a\cos\varphi - l_0)\sin\varphi.$$

При равновесии системы $Q = 0$, т. е.

$$[-2(m + m_1)\, ga + ac\,(a\cos\varphi - l_0)]\sin\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что в положении равновесия

$$\sin\varphi = 0.$$

Значит, $\varphi_1 = 0$ является одним из равновесных состояний системы. Но может быть и

$$-2(m + m_1)\, g + c\,(a\cos\varphi - l_0) = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi_2 = \frac{2(m + m_1)\, g + cl_0}{ca}.$$

Состояние равновесия, определяемое этим выражением, может существовать, если

$$2(m+m_1)g<c(a-l_0).$$

Таким образом, если

$$2(m+m_1)g>c(a-l_0),$$

то существует одно состояние равновесия

$$\varphi_1=0.$$

При $2(m+m_1)g<c(a-l_0)$ существуют два состояния равновесия:

$$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=\arccos\frac{2(m+m_1)g+cl_0}{ca}.$$

Пример 16. Две материальные точки M_1 и M_2, соединенные между собой жестким стержнем длины l, притягиваются к неподвижной точке O по закону всемирного тяготения. Пренебрегая массой стержня, найти обобщенные силы, принимая, что движение происходит в одной плоскости.

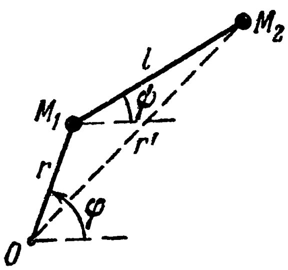

Рис. 2.6.

При движении точек в одной плоскости положение каждой из них определяется двумя координатами. По условию расстояние между точками не изменяется, следовательно, независимых координат будет три, т. е. рассматриваемая материальная система имеет три степени свободы. За обобщенные координаты примем $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=\psi$ (рис. 2.6).

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi=-\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r'},$$

где α и β — постоянные величины. Но так как

$$r'=\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos(\varphi-\psi)},$$

то

$$\Pi=-\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos(\varphi-\psi)}}.$$

Отсюда

$$Q_1=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}=-\frac{\alpha}{r^2}-\frac{\beta[r+l\cos(\varphi-\psi)]}{[r^2+l^2+2rl\cos(\varphi-\psi)]^{3/2}},$$

$$Q_2=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}=\frac{\beta rl\sin(\varphi-\psi)}{[r^2+l^2+2rl\cos(\varphi-\psi)]^{3/2}},$$

$$Q_3=-\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}=-\frac{\beta rl\sin(\varphi-\psi)}{[r^2+l^2+2rl\cos(\varphi-\psi)]^{3/2}}.$$

§ 2.4. Устойчивость состояния равновесия

Принцип виртуальных перемещений, рассмотренный в предыдущих параграфах, устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия материальной системы. Но не каждое состояние равновесия можно реализовать практически. В самом деле, для сферического маятника, рассмотренного в примере 8 (§ 1.4, рис. 1.6), обобщенные силы равны

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Условием равновесия будет

$$Pl\sin\theta = 0,$$

откуда $\theta = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Практически этому условию соответствуют два положения равновесия: нижнее при $\theta = 0$ и верхнее при $\theta = \pi$. Для положения равновесия при $\theta = 0$ характерно то, что при сообщении маятнику достаточно малого отклонения от этого положения равновесия и достаточно малой скорости он будет совершать движения вблизи состояния равновесия. Для состояния же равновесия при $\theta=\pi$ при сколь угодно малых отклонениях маятника от него и при сколь угодно малой начальной скорости маятник будет удаляться от этого положения равновесия.

Положения равновесия материальной системы, для которых небольшие отклонения от этих положений равновесия и небольшие начальные скорости точек системы не приводят к выходу материальной системы из достаточно малой окрестности положения равновесия, называются *устойчивыми*.

Если же сколь угодно малые отклонения системы от положения равновесия и сколь угодно малые начальные скорости приводят к возрастающему отклонению материальной системы от положения равновесия, то это положение равновесия называется *неустойчивым*.

Может существовать еще и так называемое безразличное положение равновесия, характерное тем, что при выводе системы из этого положения она окажется в новом положении равновесия и не будет стремиться приблизиться к прежнему положению равновесия или удалиться от него. Примером такого положения равновесия

может служить положение равновесия тяжелого шара на горизонтальной плоскости.

А. М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости состояния положения равновесия:

Устойчивым положением равновесия системы называется такое ее положение, когда при достаточно малом начальном отклонении от него и при достаточно малых начальных скоростях все точки системы, имея сколь угодно малые скорости, будут двигаться так, что все они не уйдут от своего равновесного положения далее наперед заданного расстояния, как бы оно мало ни было.

Приведем теперь достаточный признак устойчивости положения равновесия материальной системы в консервативном силовом поле, даваемый теоремой Лагранжа — Дирихле.

В теореме Лагранжа — Дирихле дается строгое доказательство того, что для любой материальной системы (в консервативном силовом поле) минимум потенциальной энергии является признаком устойчивого состояния равновесия. Приведем формулировку теоремы Лагранжа — Дирихле: *если для материальной системы, находящейся в консервативном силовом поле и подчиненной голономным идеальным стационарным связям, потенциальная энергия в положении равновесия системы имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво* *).

Отметим, что минимум потенциальной энергии обеспечивает выполнение условий равновесия (2.10), так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремальное значение.

Если заданными силами, действующими на систему с идеальными связями, будут только силы тяжести, то из теоремы Лагранжа — Дирихле следует: если центр тяжести системы занимает наинизшее положение, то это положение будет устойчивым положением равновесия (принцип Торичелли).

Если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума, то исследование устойчивости

*) Эта теорема представляет собой частный случай теоремы А. М. Ляпунова (А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935; Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946; Д. Р. Меркин, Введение в теорию устойчивости движения, «Наука», 1971).

состояния равновесия становится очень сложной задачей.

Приведем формулировку одной из теорем Ляпунова: *если отсутствие минимума потенциальной энергии* П *в исследуемом положении равновесия обнаруживается уже по членам второго порядка (или вообще по членам наименьшего порядка) в разложении функции* $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ *в ряд Тейлора, то равновесие неустойчиво.*

Пример 17. Для механической системы, рассмотренной в примере 7, потенциальная энергия может быть выражена формулой

$$\Pi = P\left(x_{C0} - x_C\right) + \frac{c}{2}\lambda^2,$$

где x_{C0} — значение координаты x_C при недеформированной пружине, $\lambda = |l - l_0|$ — растяжение пружины. В соответствии с приведенными в примере 7 расчетами

$$x_C = \frac{r}{2}\cos\varphi, \quad x_{C0} = \frac{r}{2}\cos\varphi_0, \quad \lambda = \left|2r\cos\frac{\varphi}{2} - 2r\cos\frac{\varphi_0}{2}\right|.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}Pr(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + 2cr^2\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2,$$

где

$$\cos\frac{\varphi_0}{2} = \frac{l_0}{2r} \qquad (l_0 < 2r).$$

Так как

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \frac{1}{2}Pr\sin\varphi - 2cr^2\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2},$$

то отсюда получаем условие равновесия

$$\left[(2cr - P)\cos\frac{\varphi}{2} - cl_0\right]\sin\frac{\varphi}{2} = 0,$$

что, естественно, совпадает с условием равновесия для данной системы, полученным в примере 13 из условия $Q = 0$. Там же было установлено, что всегда существует состояние равновесия при $\varphi_1 = 0$, а при

$$P < c(2r - l_0)$$

или

$$P > c(2r + l_0)$$

существует еще одно состояние равновесия:

$$\varphi = \varphi_2 = 2\arccos\frac{cl_0}{2rc - P}.$$

Выясним характер этих состояний равновесия. Вторая производная от П по φ равна

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{r}{2}\left[(P - 2cr)\cos\varphi + cl_0\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

При $\varphi=0$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}=\frac{r}{2}(P-2cr+cl_0).$$

Значит, при $P>c(2r-l_0)$ $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}>0$ и это состояние равновесия устойчиво, а при $P<c(2r+l_0)$ — неустойчиво. Для состояния равновесия

$$\varphi_2=2\arccos\frac{cl_0}{2cr-P}$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}=\frac{r}{2}\left[(P-2cr)\left(2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-1\right)+cl_0\cos\frac{\varphi_2}{2}\right]=$$
$$=\frac{r}{2}\frac{(2cr+cl_0-P)(P-2cr+cl_0)}{P-2cr}.$$

Если $P<2cr-cl_0$, то $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}>0$, т. е. состояние равновесия устойчиво. Если $P>2cr+cl_0$, то $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}<0$ и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво. Итак, при $P<2cr-cl_0$ существуют два состояния равновесия: $\varphi_1=0$ — неустойчивое и $\varphi_2=2\arccos\frac{cl_0}{2cr-P}$ — устойчивое. При $P>2cr+cl_0$ существуют также два состояния равновесия: $\varphi_1=0$ — устойчивое и $\varphi=\varphi_2$ — неустойчивое. При $c(2r-l_0)<P<c(2r+l_0)$ существует одно устойчивое состояние равновесия $\varphi_1=0$.

Пример 18. Определить устойчивость положений равновесия в примере, схема которого изображена на рис. 2.5 (§ 2.2).

Дифференцируя

$$\frac{d\Pi}{d\varphi}=2(m+m_1)ga\sin\varphi-ac(a\cos\varphi-l_0)\sin\varphi$$

по φ, получим

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}=2(m+m_1)ga\cos\varphi+ca^2\sin^2\varphi-ac(a\cos\varphi-l_0)\cos\varphi=$$
$$=a[2(m+m_1)g+cl_0]\cos\varphi+ca^2(1-2\cos^2\varphi).$$

При $\varphi=0$ будет

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}=a[2(m_1+m)g-c(a-l_0)].$$

При

$$2(m+m_1)g>c(a-l_0)$$

будет

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}>0,$$

т. е. потенциальная энергия имеет минимум и состояние равновесия $\varphi = 0$ устойчиво. При

$$2(m+m_1)g < c(a-l_0)$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0$$

и, следовательно, состояние равновесия неустойчиво. При

$$\varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{2(m+m_1)g+cl_0}{ca}$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \frac{[2(m+m_1)g+c(a+l_0)][c(a-l_0)-2(m+m_1)g]}{c}.$$

Если

$$2(m+m_1)g < c(a-l_0),$$

то $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0$ и состояние равновесия $\varphi = \varphi_2$ устойчиво. Значит, при

$$2(m+m_1)g > c(a-l_0)$$

существует одно устойчивое состояние равновесия $\varphi = 0$. При

$$2(m+m_1)g < c(a-l_0)$$

существуют два состояния равновесия: неустойчивое $\varphi = 0$ и устойчивое $\varphi = \varphi_2$.

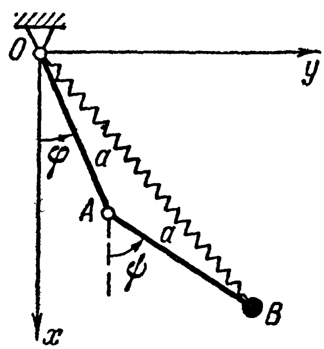

Рис. 2.7.

Пример 19. Невесомый стержень OA длины a может свободно вращаться вокруг точки O. К концу A стержня шарнирно прикреплен невесомый стержень AB длины a, на другом конце которого закреплен груз B массы m. Точка O и точка B соединены между собой пружиной жесткости c. Масса пружины пренебрежимо мала, длина пружины в ненапряженном состоянии равна a. Найти положения равновесия (рис. 2.7), считая, что система расположена в плоскости xy.

Пусть обобщенными координатами будут

$$q_1 = \varphi, \qquad q_2 = \psi.$$

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -mgx_B + \frac{1}{2}c\lambda^2.$$

Здесь

$$x_B = a(\cos\varphi + \cos\psi),$$

$$\lambda = 2a\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - a;$$

значит, потенциальная энергия

$$\Pi = -mga(\cos\varphi + \cos\psi) + \frac{1}{2}ca^2\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)^2.$$

Далее вычисляем

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = mga\sin\varphi + ca^2\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi-\varphi}{2},$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = mga\sin\psi - ca^2\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi-\varphi}{2}.$$

Углы φ и ψ в положении равновесия определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\varphi + ca\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi-\varphi}{2} = 0,\\ mg\sin\psi - ca\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\sin\frac{\psi-\varphi}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Очевидно, что в положении равновесия

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0$$

и

$$\varphi_2 = \pi, \quad \psi_2 = \pi.$$

Складывая между собой оба уравнения (2.11), получим положение равновесия, для которого

$$\sin\varphi + \sin\psi = 0,$$

т. е. когда

$$\psi = -\varphi.$$

Вычислим теперь вторые производные от Π:

$$A = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = mga\cos\varphi + ca^2\sin^2\frac{\psi-\varphi}{2} - \\ - \frac{ca^2}{2}\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\psi-\varphi}{2},$$

$$B = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi\,\partial\psi} = -ca^2\sin^2\frac{\psi-\varphi}{2} + \frac{ca^2}{2}\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\psi-\varphi}{2},$$

$$C = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\psi^2} = mga\cos\psi + ca^2\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\left(2\cos\frac{\psi-\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\psi-\varphi}{2}.$$

В положении равновесия $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$,

$$A = mga - \frac{ca^2}{2}, \quad B = \frac{ca^2}{2}, \quad C = mga - \frac{ca^2}{2}$$

и

$$\Delta = AC - B^2 = \left(mga - \frac{ca^2}{2}\right)^2 - \frac{c^2a^4}{4} = mga\,(mga - ca^2).$$

При $mg > ca$ $\Delta > 0$, а так как при этом $A > 0$, то потенциальная энергия имеет минимум и положение равновесия устойчиво. При

$\Delta < 0$, т. е. при $mg < ca$, потенциальная энергия экстремума не имеет.

В положении равновесия $\varphi_2 = \pi$, $\psi_2 = \pi$,

$$A = -mga - \frac{ca^2}{2} < 0, \quad B = \frac{ca^2}{2}, \quad C = -mga - \frac{ca^2}{2},$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)^2 - \frac{c^2a^4}{4} = mga\,(mga + c^2a^2) > 0.$$

Поскольку $A < 0$, то состояние равновесия $\varphi_2 = \pi$, $\psi_2 = \pi$ неустойчиво.

Рассмотрим теперь случай, когда $\psi_3 = -\varphi_3 \neq 0$. Уравнения для определения ψ_3 и φ_3 получим из уравнений (2.11):

$$[mg - ca\,(2\cos\varphi_3 - 1)]\sin\varphi_3 = 0,$$
$$[mg - ca\,(2\cos\psi_3 - 1)]\sin\psi_3 = 0.$$

Считая, что $\sin\varphi_3 \neq 0$ и $\sin\psi_3 \neq 0$, имеем

$$mg - ca\,(2\cos\varphi_3 - 1) = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi_3 = \cos\psi_3 = \frac{mg + ca}{2ca}.$$

Это положение равновесия существует, если

$$mg + ca < 2ca,$$

т. е.

$$mg < ca.$$

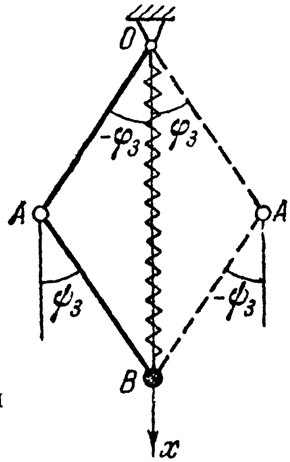

Рис. 2.8.

Далее находим

$$A = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)\cos\varphi_3 + ca^2\,(1 - 2\cos^2\varphi_3),$$

$$B = -ca^2\,(1 - 2\cos^2\varphi_3) - \frac{ca^2}{2}\cos\varphi_3,$$

$$C = \left(mga + \frac{ca^2}{2}\right)\cos\varphi_3 + ca^2\,(1 - 2\cos^2\varphi_3),$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2mgca^3\cos\varphi_3\,(1 - \cos^2\varphi_3).$$

Так как решение $\varphi = \varphi_3$ существует при $ca > mg$, то $\Delta > 0$, но так как при этом

$$A = \frac{mga}{2}\cos\varphi_3 + ca^2\,(1 - \cos^2\varphi_3) > 0,$$

то положение равновесия $\varphi = \mp\varphi_3$, $\psi = \pm\psi_3$ при $ca > mg$ устойчиво. На рис. 2.8 показаны эти состояния равновесия.

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 3.1. Уравнения Лагранжа первого рода

Рассмотрим систему n материальных точек, подчиненную k голономным идеальным связям. Дифференциальные уравнения движения точек материальной системы в координатной форме, в проекциях на оси декартовой системы координат имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= X_i + R_{xi}, \\ m_i\ddot{y}_i &= Y_i + R_{yi}, \\ m_i\ddot{z}_i &= Z_i + R_{zi} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

где m_i — масса i-й точки, X_i, Y_i, Z_i — проекции равнодействующей активных сил, приложенных к i-й точке, R_{xi}, R_{yi}, R_{zi} — проекции равнодействующей реакций связей, действующих на i-ю точку.

Если активные силы заданы, то система уравнений (3.1) представляет собой систему $3n$ уравнений с $6n$ неизвестными: $3n$ координат (x_i, y_i, z_i) и $3n$ проекций реакций связей (R_{xi}, R_{yi}, R_{zi}). Присоединяя к этим уравнениям k уравнений связи

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.2}$$

будем иметь уже $3n + k$ уравнений. Для получения остальных $3n - k$ уравнений следует учесть характер связей.

Так как связи идеальные, то проекции реакций связей, в соответствии с формулами (1.35), запишутся в

виде

$$\left.\begin{aligned} R_{xi} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ R_{yi} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ R_{zi} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.3}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.1), получим

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Присоединяя к этим $3n$ уравнениям k уравнений связей (3.2), будем иметь $3n + k$ уравнений относительно $3n + k$ неизвестных координат (x_i, y_i, z_i) и множителей Лагранжа $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_k)$. После решения этой системы уравнений проекции реакций могут быть найдены по формулам (3.3).

Уравнения (3.4) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*. Следует отметить, что практическое использование уравнений (3.4) в системах с большим количеством точек весьма затруднительно из-за большого числа уравнений.

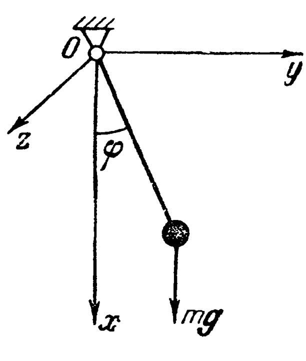

Рис. 3.1.

Покажем применение этих уравнений на примере системы с одной степенью свободы. Пусть математический маятник совершает движение в вертикальной плоскости xy (рис. 3.1). Уравнения связей имеют

в этом случае вид

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

На основании (3.4) уравнениями движения будут

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg + \lambda_1 2x, \\ m\ddot{y} &= \lambda_1 2y, \\ 0 &= \lambda_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

так как $z = 0$. Следовательно,

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{m\ddot{y}}{2y}. \tag{3.7}$$

После умножения первого уравнения системы (3.6) на y и вычитания из него второго уравнения, умноженного на x, получим

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgy. \tag{3.8}$$

Введем замену

$$x = l\cos\varphi, \quad y = l\sin\varphi. \tag{3.9}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}, \\ \ddot{x} &= -l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - l\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}, \\ \ddot{y} &= -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

и уравнение (3.8) примет известную форму дифференциального уравнения колебания математического маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение при начальных условиях: $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$. Тогда первый интеграл будет равен

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1 - \cos\varphi). \tag{3.11}$$

Найдем теперь реакцию нити. В соответствии с формулами (3.3)

$$R_x = \lambda_1 2x = m\ddot{y}\frac{x}{y},$$

$$R_y = \lambda_1 2y = m\ddot{y},$$

$$R_z = 0$$

и, следовательно,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = m\,|\ddot{y}|\,\frac{l}{y} = ml\left|\frac{\ddot{y}}{y}\right|,$$

или

$$R = ml\left|\dot{\varphi}^2 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\ddot{\varphi}\right|.$$

Так как

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

а $\dot{\varphi}^2$ определяется формулой (3.11), то

$$R = ml\left|\dot{\varphi}_0^2 - 2\frac{g}{l}(1-\cos\varphi) + \frac{g}{l}\cos\varphi\right| = ml\left|\dot{\varphi}_0^2 - \frac{g}{l}(2 - 3\cos\varphi)\right|.$$

Из этого уравнения следует, что связь в виде нити будет удерживающей, если при $\varphi = \pi$ $R \geqslant 0$. Это будет, если начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0$ удовлетворит неравенству

$$\dot{\varphi}_0^2 \geqslant \frac{5g}{l}.$$

§ 3.2. Общее уравнение динамики

В курсе теоретической механики при рассмотрении несвободного движения материальной точки иногда применяется принцип Даламбера (метод кинетостатики).

Если в дифференциальном уравнении движения материальной точки

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \tag{3.12}$$

где $\boldsymbol{w}$ — ускорение точки, m — ее масса, а $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ — соответственно активная сила и реакция связи, ввести обозначение

$$\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{w}, \tag{3.13}$$

то уравнение (3.12) можно записать в форме

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{J} = 0, \tag{3.14}$$

которое и выражает принцип Даламбера. Вектор $\boldsymbol{J} = -m\boldsymbol{w}$ называется *силой инерции.*

Уравнение (3.14) представляет собой уравнение движения, записанное в форме уравнения статики. Принцип Даламбера можно сформулировать следующим образом: *в любой момент движения сумма активной силы, реакции связи и силы инерции равна нулю.*

Рассмотрим теперь систему материальных точек, подчиненную идеальным связям. Для каждой точки системы согласно (3.14) можно написать

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{J}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.15}$$

где $\boldsymbol{F}_i$ и $\boldsymbol{R}_i$ — равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на i-ю точку, а $\boldsymbol{J}_i = -m_i\boldsymbol{w}_i$ — сила инерции, соответствующая i-й точке. Умножая каждое из выражений (3.15) на соответствующее рассматриваемой точке виртуальное перемещение $\delta\boldsymbol{r}_i$ и складывая затем полученные соотношения между собой, получим

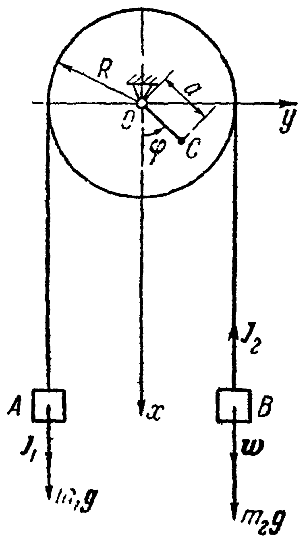

Рис. 3.2.

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{J}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \qquad (3.16)$$

Так как связи, наложенные на материальную систему, идеальные, то

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{J}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{w}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \qquad (3.17)$$

Полученный результат можно сформулировать так: *в каждый момент движения материальной системы, подчиненной идеальным связям, виртуальная работа всех активных сил и сил инерции на виртуальных перемещениях точек материальной системы равна нулю.*

Уравнение (3.17) и представляет собой общее уравнение динамики, или уравнение Даламбера — Лагранжа. Если X_i, Y_i, Z_i — проекции силы $\boldsymbol{F}_i$ на оси декартовой системы координат, а $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ — проекции ускорения i-й точки на эти же оси, то уравнение (3.17) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i] = 0. \qquad (3.18)$$

Пример 20. Неоднородный блок массы m и радиуса R может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его геометрический центр. Центр тяжести C блока находится на расстоянии a от оси вращения. Через блок перекинута нерастяжимая нить, массой которой можно пренебречь. Нить по блоку не про-

скальзывает. Массы грузов A и B, подвешенных к концам нити, равны m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Определить ускорение груза B.

Предположим, что груз B имеет ускорение w, направленное вниз (рис. 3.2). В соответствии с условием (3.18) имеем

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(m_i g + J_{ix})\,\delta x_i + J_{iy}\,\delta y_i\right] = 0,$$

где последняя сумма относится к точкам диска, а

$$J_i = J_{ix} i + J_{iy} j = -m_i (w_{ix} i + w_{iy} j)$$

— сила инерции i-й точки диска. Так как ускорение i-й точки диска равно *)

$$w_i = \varepsilon \times r_i - \omega^2 r_i,$$

где ε — угловое ускорение, ω — угловая скорость диска, r_i — радиус-вектор i-й точки диска, то

$$w_{ix} = -\varepsilon_z y_i - \omega^2 x_i = \varepsilon y_i - \omega^2 x_i,$$
$$w_{iy} = \varepsilon_z x_i - \omega^2 y_i = -\varepsilon x_i - \omega^2 y_i,$$

где $\varepsilon = |\varepsilon_z|$, и, следовательно,

$$J_{ix} = -m_i w_{ix} = -m_i y_i \varepsilon + m_i \omega^2 x_i,$$
$$J_{iy} = -m_i w_{iy} = m_i x_i \varepsilon + m_i \omega^2 y_i.$$

Таким образом, имеем

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(m_i g - m_i y_i \varepsilon + m_i \omega^2 x_i)\,\delta x_i + (m_i x_i \varepsilon + m_i y_i \omega^2)\,\delta y_i\right] = 0.$$

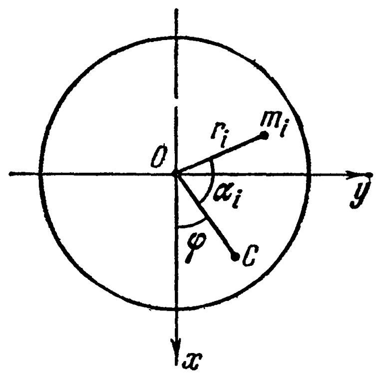

Рис. 3.3.

Координаты i-й точки диска равны (рис. 3.3) $x_i = r_i \cos(\varphi + \alpha_i)$, $y_i = r_i \sin(\varphi + \alpha_i)$, где α_i — постоянный угол между радиусом-вектором i-й точки и направлением отрезка OC. Значит,

$$\delta x_i = -r_i \sin(\varphi + \alpha_i)\,\delta\varphi = -y_i\,\delta\varphi,$$
$$\delta y_i = r_i \cos(\varphi + \alpha_i)\,\delta\varphi = x_i\,\delta\varphi.$$

Тогда

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + \sum_{i=1}^{n} \left[-m_i y_i g + m_i \varepsilon (y_i^2 + x_i^2)\right] \delta\varphi = 0,$$

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1970.

или

$$(m_1 g + m_1 w)\,\delta x_1 + (m_2 g - m_2 w)\,\delta x_2 + (-m y_C g + \varepsilon I_O)\,\delta\varphi = 0,$$

где I_O — момент инерции блока относительно центра O. Так как нить нерастяжима и не проскальзывает, то

$$\delta x_1 = -\delta x_2, \qquad \delta\varphi = -\frac{\delta x_2}{R}$$

и, следовательно,

$$\left(-m_1 g - m_1 w + m_2 g - m_2 w + \frac{m y_C}{R} g - \frac{\varepsilon I_O}{R}\right)\delta x_2 = 0.$$

Принимая $\delta x_2 \neq 0$, получим

$$\left(m_2 - m_1 + m\frac{y_C}{R}\right)g - (m_1 + m_2)\,w - \frac{\varepsilon I_O}{R} = 0.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{w}{R}, \qquad y_C = a\sin\varphi,$$

найдем

$$w = \frac{m_2 - m_1 + m\dfrac{a}{R}\sin\varphi}{m_1 + m_2 + \dfrac{I_O}{R^2}}\,g.$$

Движение грузов будет колебательным, если

$$m_2 - m_1 - m\frac{a}{R} < 0,$$

так как при выполнении этого условия и при $\sin\varphi > 0$ ускорение $w < 0$, при $\sin\varphi < 0$ ускорение $w > 0$, ибо по условию задачи $m_2 > m_1$. Если блок будет однородным, то $a = 0$ и

$$w = \frac{2(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2) + m}\,g,$$

так как $I_O = \dfrac{mR^2}{2}$. В этом случае $w > 0$.

Пример 21. Через блок A массы m и радиуса R перекинута невесомая нерастяжимая нить. На одном конце этой нити привязан груз массы m_1, к другому концу прикреплен блок B радиуса r и массы m_2. Через блок B также перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы массой m_3 и m_4 (рис. 3.4). Ось блока A неподвижна. Нити по блокам не проскальзывают. Определить ускорение грузов, считая блоки A и B однородными.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. В соответствии с выражением (3.18) можно записать

$$(m_1g - m_1w_{1x})\,\delta x_1 + (m_2g - m_2w_{2x})\,\delta x_2 + \\ + (m_3g - m_3w_{3x})\,\delta x_3 + (m_4g - m_4w_{4x})\,\delta x_4 - I_O\varepsilon_z\,\delta\varphi - I_{O_1}\varepsilon_{2z}\,\delta\varphi_1 = 0,$$

где I_O и I_{O_1} — моменты инерции блоков A и B относительно их осей вращения, а ε_z и ε_{2z} их угловые ускорения. Составим уравнения связей:

$$x_1 + x_2 + \pi R = l_1,$$
$$x_3 + x_4 - 2x_2 + \pi r = l_2,$$

где l_1 и l_2 — длины нитей. Из этих уравнений следует, что

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0,$$
$$\delta x_3 + \delta x_4 - 2\,\delta x_2 = 0$$

и

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \qquad \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 - 2\ddot{x}_2 = 0,$$

т. е.

$$w_{1x} + w_{2x} = 0,$$
$$w_{3x} + w_{4x} - 2w_{2x} = 0.$$

Из этих выражений можно найти

$$\delta x_2 = -\,\delta x_1,$$
$$\delta x_4 = -\,\delta x_3 - 2\delta x_1,$$
$$w_{2x} = -\,w_{1x}, \qquad w_{4x} = -\,w_{3x} - 2w_{1x}.$$

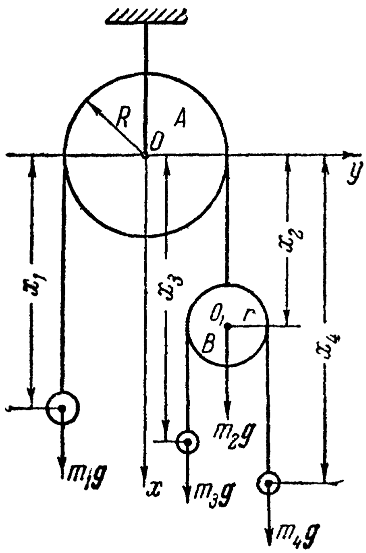

Рис. 34.

Кроме того, имеем

$$\varepsilon_z = \frac{w_{1x}}{R}, \quad \varepsilon_{2z} = \frac{w_{3x}}{r}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta x_1}{R}, \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta x_3}{r},$$

$$I_O = \frac{m_1R^2}{2}, \quad I_{O_1} = \frac{m_2r^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\left[(m_1 - m_2 - 2m_4)\,g - \left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m}{2}\right) w_{1x} - 2m_4w_{3x}\right]\delta x_1 + \\ + \left[(m_3 - m_4)\,g - 2m_4w_{1x} - \left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) w_{3x}\right]\delta x_3 = 0,$$

откуда

$$\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \frac{m}{2}\right) w_{1x} + 2m\ w_{3x} = (m_1 - m_2 - 2m\ )\,g,$$

$$2m_4w_{1x} + \left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) w_{3x} = (m_3 - m_4)\,g.$$

Решая эти уравнения, получим

$$w_{1x} = g\frac{(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 2m_4\,(m_3 - m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \dfrac{m}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2},$$

$$w_{3x} = g\frac{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \dfrac{m}{2}\right)(m_3 - m_4) - 2m_4\,(m_1 - m_2 - 2m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \dfrac{m}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}.$$

Так как $w_{2x} = -w_{1x}$ и $w_{4x} = -w_{3x} - 2w_{1x}$, то окончательно

$$w_{2x} = -g\frac{(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 2m_4\,(m_3 - m_4)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \dfrac{m}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2},$$

$$w_{4x} = -g\frac{(m_3 - m_4)\left(m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}\right) + 2\,(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + \dfrac{m_2}{2}\right)}{\left(m_1 + m_2 + 4m_4 + \dfrac{m}{2}\right)\left(m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}\right) - 4m_4^2}.$$

Если числитель в выражении w_{1x} равен нулю, т. е.

$$(m_1 - m_2 - 2m_4)\left(m_3 + m_4 + \frac{m_2}{2}\right) - 2m_4\,(m_3 - m_4) = 0,$$

то это значит, что масса m_1 или движется с постоянной скоростью, или находится в покое. Величина m_1 при этом равна

$$m_1 = m_2 + 2m_4 + \frac{2m_4\,(m_3 - m_4)}{m_3 + m_4 + \dfrac{m_2}{2}}.$$

§ 3.3. Уравнения движения в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Уравнения движения несвободной голономной системы в обобщенных координатах мы получим из общего уравнения динамики (3.17). Приступая к выводу, следует прежде всего определить число степеней свободы, затем выбрать обобщенные координаты. Они должны удовлетворять условиям — однозначно определять положение системы и быть между собой независимыми. В остальном выбор обобщенных координат вообще произволен. Однако весьма важен «удачный» выбор этих координат. Термин «удачный» нужно понимать в том смысле, что

уравнения движения при таком выборе получают наиболее компактный вид. Например, для математического маятника (рис. 3.1) наиболее удачной обобщенной координатой является угол φ. Для сферического маятника (рис. 1.6) такими координатами будут θ и φ.

Выбрав обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (s — число степеней свободы), следует далее выразить декартовы координаты точек системы через эти обобщенные координаты, т. е. получить функции

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),\\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),\\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.19)$$

Отсюда получается эквивалентная им зависимость

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.20)$$

($\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки).

В соответствии с (1.41) можно записать

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\delta q_m \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя это выражение для $\delta\boldsymbol{r}_i$ в общее уравнение динамики (3.17), получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{w}_i) \cdot \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\delta q_m = 0,$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m \cdot \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{w}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = 0.$$

Так как вариации обобщенных координат могут выбираться независимо друг от друга, то полученное равенство будет выполняться только тогда, когда коэффициенты при $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ будут равны нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{w}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, s). \qquad (3.21)$$

Вспомнив, что обобщенные силы выражаются формулой (1.42):

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

перепишем выражения (3.21) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \qquad (3.22)$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, преобразуем следующим образом:

$$m_i \boldsymbol{w}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = \frac{d}{dt}\left(m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\right) - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\right). \qquad (3.23)$$

На основании (3.20) имеем

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}. \qquad (3.24)$$

Так как частные производные

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

являются функциями обобщенных координат и времени, то, дифференцируя (3.24) по $\dot{q}_m$, найдем, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \qquad (3.25)$$

Продифференцировав выражение (3.24) по q_m, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m \, \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m \, \partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m \, \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m \, \partial t}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1\,\partial q_m}\dot q_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2\,\partial q_m}\dot q_2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\,\partial q_m}\dot q_s+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t\,\partial q_m}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_m}. \tag{3.26}$$

Подставляя соотношения (3.25) и (3.26) в выражение (3.23), будем иметь *)

$$m_i\boldsymbol{w}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}=\frac{d}{dt}\left(m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot q_m}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_m}=$$
$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_m}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right). \tag{3.27}$$

Используя полученное выражение (3.27), перепишем соотношения (3.22) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q_m}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_m}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}=Q_m,$$

но так как

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} \tag{3.28}$$

есть кинетическая энергия материальной системы, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.29}$$

Полученные уравнения называются *уравнениями Лагранжа второго рода*. Производные от обобщенных координат $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$ называются *обобщенными скоростями*. Уравнения Лагранжа второго рода не содержат реакций идеальных связей, что делает их удобными для практического использования. Таким образом, в общем случае каких угодно активных сил и при наличии идеальных связей движение материальной системы определяется s уравнениями Лагранжа второго рода (3.29).

*) Здесь используется равенство $\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q}=v\frac{\partial v}{\partial q}$, вытекающее из соотношения $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v^2$.

Для составления левых частей этих уравнений следует выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Обобщенные силы, стоящие в правых частях этих уравнений, могут быть найдены или непосредственно по формулам (1.42), или как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для возможной работы (1.43).

Система уравнений Лагранжа второго рода представляет собой систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрирование этих уравнений дает нам обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ как функции времени и $2s$ произвольных постоянных интегрирования. Далее на основании формул (3.19) можно получить декартовы координаты в зависимости от времени t и $2s$ произвольных постоянных интегрирования.

Если бы рассматриваемая материальная система была свободной, решение дифференциальных уравнений ее движения содержало бы $2 \cdot 3n = 6n$ произвольных постоянных. Следовательно, решение уравнений несвободной системы не досчитывает $6n - 2s = 2(3n - s) = 2k$ постоянных интегрирования. Это произошло потому, что задача решалась при наперед заданных $2k$ интегральных формулах, именно k уравнениях связей и k тех соотношениях, которые можно получить путем однократного дифференцирования этих уравнений связи; соответственно с этим и понизилось число необходимых актов интегрирования на $2k$. Поэтому для задачи о движении несвободной системы полученное решение, содержащее $2s$ произвольных постоянных, является окончательным, исчерпывающим все варианты в задании начальных условий.

Замечание. При применении уравнений Лагранжа второго рода к задачам на относительное движение, а также к задачам с нестационарными связями кинетическую энергию материальной системы следует вычислять в ее абсолютном движении; при нахождении обобщенных сил нужно исходить из того, что связи считаются мгновенно остановленными.

§ 3.4. Примеры на составление уравнений Лагранжа второго рода

Пример 22. Составить уравнение движения физического маятника, представляющего собой однородный диск массы M и радиуса r, жестко прикрепленный к концу A стержня длины l. Другой конец O стержня является точкой подвеса (рис. 3.5). Массой стержня пренебречь.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол $q = \varphi$.

Координатами центра тяжести диска x_C и y_C будут

$$x_C = (l + r)\cos\varphi, \quad y_C = (l + r)\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2, \quad \text{где} \quad I_O = I_C + M(l + r)^2$$

есть момент инерции маятника относительно точки подвеса

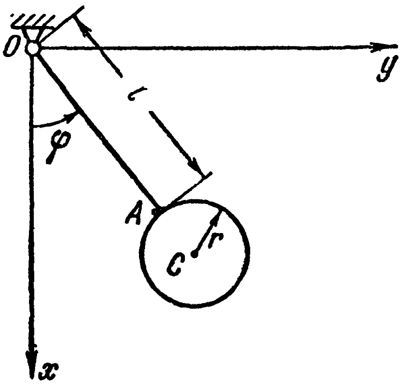

Рис. 3.5.

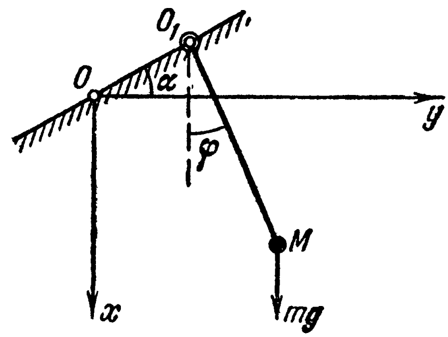

Рис. 3.6.

(I_C — момент инерции диска относительно его центра). Так как

$$I_C = \frac{Mr^2}{2}, \quad \text{то} \quad I_O = \frac{M}{2}\left[r^2 + 2(l + r)^2\right].$$

Согласно формуле (1.42) обобщенная сила

$$Q = X\frac{\partial x_C}{\partial \varphi} = -Mg(l + r)\sin\varphi.$$

Имея в виду, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_O\dot{\varphi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

получим

$$I_O\ddot{\varphi} = -Mg(l + r)\sin\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2g(l + r)}{r^2 + 2(l + r)^2}\sin\varphi = 0.$$

Приведенная длина такого маятника равна

$$l_1 = \frac{r^2 + 2(l + r)^2}{2(l + r)}.$$

Пример 23. Составить уравнение движения математического маятника, точка O_1 подвеса которого совершает гармоническое движение в вертикальной плоскости вдоль прямой, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 3.6).

Пусть $OO_1 = a\sin\omega t$. За обобщенную координату возьмем угол $q=\varphi$. Координаты точки M зависят от φ следующим образом:

$$x = l\cos\varphi - OO_1\sin\alpha = l\cos\varphi - a\sin\omega t\sin\alpha,$$
$$y = l\sin\varphi + OO_1\cos\alpha = l\sin\varphi + a\sin\omega t\cos\alpha.$$

Так как

$$\dot x = -l\sin\varphi\cdot\dot\varphi - a\omega\cos\omega t\sin\alpha,$$
$$\dot y = l\cos\varphi\cdot\dot\varphi + a\omega\cos\omega t\cos\alpha,$$

то скорость точки M определяется из условия

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot\varphi a\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha) + a^2\omega^2\cos^2\omega t.$$

Следовательно, кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{1}{2}m\left[l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot\varphi a\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha) + a^2\omega^2\cos^2\omega t\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = ml^2\dot\varphi + mla\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -ml\dot\varphi a\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha).$$

Виртуальная работа равна

$$\delta A = mg\,\delta x = -mgl\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q = -mgl\sin\varphi.$$

Составим теперь уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2\dot\varphi + mla\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha)\right] =$$
$$= ml\dot\varphi a\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha) = -mgl\sin\varphi,$$

откуда

$$ml^2\ddot\varphi - mla\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi-\alpha) + mgl\sin\varphi = 0,$$

или

$$\ddot\varphi - \frac{a}{l}\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi-\alpha) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Для малых φ это уравнение имеет вид

$$\ddot\varphi + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l}\omega^2\sin\alpha\sin\omega t\right)\varphi = \frac{a}{l}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t.$$

Пример 24. Составить уравнения движения центробежного регулятора, схема которого представлена на рис. 3.7. Точечные грузы

M_1 и M_2 имеют массы, равные m. Масса муфты A равна M. Массой стержней, длина которых l, пренебречь. Угловая скорость вращения регулятора постоянна и равна ω. Трением пренебречь.

Рассматриваемая система состоит из трех тел: точек M_1 и M_2 и муфты A. Число степеней свободы равно единице. За обобщенную координату примем угол φ.

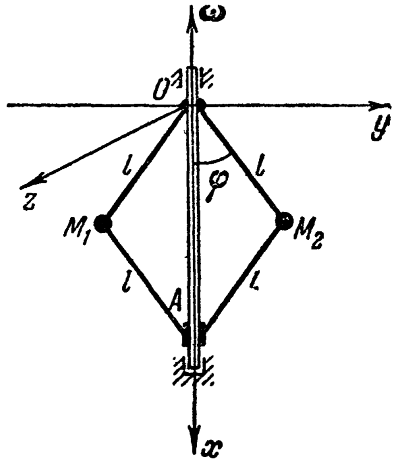

Рис. 3.7.

В неподвижной системе координат $Oxyz$ координатами точек M_1 и M_2 и муфты A будут соответственно

$$x_1 = l\cos\varphi,$$
$$y_1 = l\sin\varphi\cos(\omega t + \alpha),$$
$$z_1 = l\sin\varphi\sin(\omega t + \alpha),$$
$$x_2 = l\cos\varphi,$$
$$y_2 = -l\sin\varphi\cos(\omega t + \alpha),$$
$$z_2 = -l\sin\varphi\sin(\omega t + \alpha).$$
$$x_3 = 2l\cos\varphi,$$
$$y_3 = 0, \quad z_3 = 0,$$

где α — угол, который образует плоскость регулятора с неподвижной плоскостью xy в начальный момент времени. Скорости точек M_1 и M_2 и муфты A соответственно определяются соотношениями

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_3^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi.$$

Кинетическая энергия системы будет равна

$$T = l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + ml^2\omega^2\sin^2\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\,\dot{\varphi},$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 4Ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 2ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Виртуальная работа равна

$$\delta A = mg\,\delta x_1 + mg\,\delta x_2 + Mg\,\delta x_3 =$$
$$= (-mgl\sin\varphi - mgl\sin\varphi - 2Mgl\sin\varphi)\,\delta\varphi,$$

и, следовательно,

$$Q = -2gl(m+M)\sin\varphi.$$

Составим уравнение Лагранжа:

$$(m+2M\sin^2\varphi)\ddot{\varphi}+2M\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi-m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi=-\frac{g}{l}(m+M)\sin\varphi.$$

Регулятор будет в положении равновесия, если $\ddot{\varphi}=0$, $\dot{\varphi}=0$. Это будет при *)

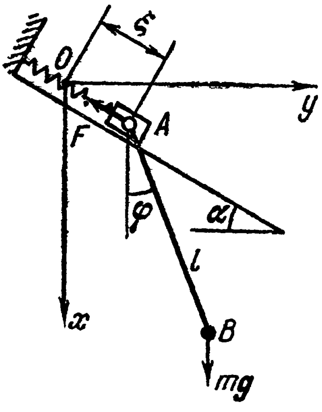

Рис. 3.8.

$$\cos\varphi_0=\frac{(m+M)g}{ml\omega^2}.$$

Введем в рассмотрение новую координату ψ, определяемую равенством

$$\varphi=\varphi_0+\psi.$$

Тогда

$$\sin(\varphi_0+\psi)=\sin\varphi_0\cos\psi+\cos\varphi_0\sin\psi,$$
$$\cos(\varphi_0+\psi)=\cos\psi_0\cos\psi-\sin\varphi_0\sin\psi.$$

Для малых ψ

$$\sin(\varphi_0+\psi)\approx\sin\varphi_0+\psi\cos\varphi_0,$$
$$\cos(\varphi_0+\psi)\approx\cos\varphi_0-\psi\sin\varphi_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения и сохраняя только линейные члены относительно ψ, $\dot{\psi}$, будем иметь

$$\ddot{\psi}+\frac{m\omega^2\sin^2\varphi_0}{m+2M\sin^2\varphi_0}\psi=0,$$

где

$$\sin^2\varphi_0=1-\left[\frac{(m+M)g}{ml\omega^2}\right]^2.$$

Пример 25. Составить уравнения движения для системы, состоящей из груза A массы M, движущегося без трения по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, и прикрепленного к нему математического маятника. Масса груза маятника равна m, нить невесома и имеет длину l. К грузу A прикреплена пружина (рис. 3.8) жесткостью c, другой конец которой закреплен в неподвижной точке.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты выберем расстояние ξ вдоль плоскости от груза A до точки статического равновесия пружины и угол φ, образуемый маятником с вертикалью.

---

*) Это значит, что равновесное положение возможно, если $\omega^2>\frac{m+M}{ml}g$.

Координатами центра масс груза A и координатами точки B соответственно будут (начало координат помещено в точку статического равновесия)

$$x_1 = \xi \sin\alpha, \quad y_1 = \xi\cos\alpha,$$
$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi = \xi\sin\alpha + l\cos\varphi,$$
$$y_2 = y_1 + l\sin\varphi = \xi\cos\alpha + l\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\,[\dot{\xi}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\xi}l\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha\,)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}} = (M+m)\,\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\xi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + m\dot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -\,m\dot{\xi}l\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha).$$

Найдем обобщенные силы. Сила, действующая на груз A со стороны пружины, равна $F = c\,|\xi+\lambda\,|$, где λ — статическое удлинение пружины, равное

$$\lambda = \frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{c}.$$

Следовательно,

$$\delta A = -\,c\,(\xi+\lambda)\sin\alpha\,\delta x_1 - c\,(\xi+\lambda)\cos\alpha\,\delta y_1 + Mg\,\delta x_1 + mg\,\delta x_2 =$$
$$= [-\,c\,(\xi+\alpha) + (M+m)\,g\sin\alpha]\,\delta\xi - mgl\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Отсюда

$$Q_1 = -\,c\,(\xi+\lambda) + (M+m)\,g\sin\alpha = -\,c\xi,$$
$$Q_2 = -\,mgl\sin\varphi.$$

Уравнениями Лагранжа будут

$$\frac{d}{dt}\left[(M+m)\,\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)\right] = -\,c\xi,$$
$$\frac{d}{dt}\left[ml^2\dot{\varphi} + m\dot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha)\right] + m\dot{\xi}l\dot{\varphi}\sin(\varphi+\alpha) = -\,mgl\sin\varphi$$

или

$$(M+m)\,\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha) = -\,c\xi,$$
$$ml^2\ddot{\varphi} + m\ddot{\xi}l\cos(\varphi+\alpha) = -\,mgl\sin\varphi.$$

§ 3.5. Учет дополнительных связей

Рассмотрим теперь вопрос об учете дополнительных связей, которые могут быть наложены на точки материальной системы.

Пусть на систему, подчиненную k связям, дополнительно налагается еще r связей. В этом случае число ранее выбранных обобщенных координат $3n-k$ будет превосходить число степеней свободы $3n-k-r$, которые теперь имеет рассматриваемая система. Дополнительные связи мы будем учитывать путем введения реакций этих связей в число активных сил. Обозначим эти реакции через $\boldsymbol{R}'_i$. Виртуальная работа при этом вычисляется по формуле

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}'_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{m=1}^{s} (Q_m + Q'_m)\, \delta q_m,$$

где Q'_m — обобщенные силы, обусловленные реакциями $\boldsymbol{R}'_i$. Следовательно, обобщенные силы в уравнениях Лагранжа будут состоять из двух частей, соответствующих активным силам и реакциям новых связей, т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + Q'_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.30}$$

Если новые связи идеальные, то в соответствии с формулами (1.35)

$$\left.\begin{aligned} R'_{xi} &= \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}, \\ R'_{yi} &= \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i}, \\ R'_{zi} &= \sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.31}$$

где λ_ρ — множители Лагранжа, а

$$f_\rho(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t) = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ \ldots,\ r) \tag{3.32}$$

— уравнения дополнительных связей.

Согласно формуле (1.42) имеем

$$Q'_m = \sum_{i=1}^{n}\left(R'_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + R'_{yi}\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + R'_{zi}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right),$$

или, учитывая выражения (3.31), получим

$$Q'_m = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial y_i} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial z_i}\right) =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_\rho}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial f_\rho}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right) =$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial q_m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (3.33)$$

Таким образом, уравнения (3.30) могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_m} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_m} + \ldots + \lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial q_m}. \qquad (3.34)$$

Для фактического решения этой задачи к уравнениям (3.34) (их число $3n - k$) следует присоединить еще r уравнений новых связей (3.32). Тогда мы получим систему $3n - k + r$ уравнений с тем же числом неизвестных: $3n - k$ обобщенных координат и r лагранжевых множителей.

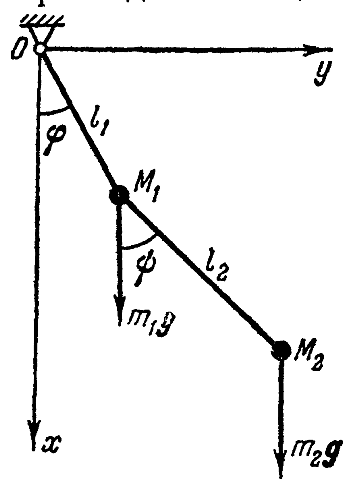

Рис. 3.9.

Пример 26. Найти реакции, обусловленные введением дополнительной связи, для двойного математического маятника. Массы грузов M_1 и M_2 равны соответственно m_1 и m_2, а длины — l_1 и l_2.

Составим сначала уравнения движения двойного маятника без дополнительных связей (рис. 3.9). Число степеней свободы равно двум. Пусть $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$. Координаты грузов M_1 и M_2 выражаются через φ и ψ формулами

$$x_1 = l_1\cos\varphi, \qquad y_1 = l\sin\varphi,$$
$$x_2 = l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi, \qquad y_2 = l_1\sin\varphi + l_2\sin\psi.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot x_1^2+\dot y_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot x_2^2+\dot y_2^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\,l_1^2\dot\varphi^2+\frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot\psi^2+2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=(m_1+m_2)\,l_1^2\dot\varphi+m_2l_1l_2\dot\psi\cos(\varphi-\psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-m_2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi-\psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}=m_2l_2^2\dot\psi+m_2l_1l_2\dot\varphi\cos(\varphi-\psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\psi}=m_2l_1l_2\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi-\psi).$$

Виртуальная работа

$$\delta A=m_1g\,\delta x_1+m_2g\,\delta x_2=$$
$$=(-m_1gl_1\sin\varphi-m_2gl_1\sin\varphi)\,\delta\varphi-m_2l_2g\sin\psi\,\delta\psi,$$

откуда

$$Q_1=-(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi,$$
$$Q_2=-m_2gl_2\sin\psi.$$

Уравнениями движения системы будут

$$\left.\begin{aligned}&(m_1+m_2)\,l_1^2\ddot\varphi+m_2l_1l_2\cos(\varphi-\psi)\,\ddot\psi+m_2l_1l_2\dot\psi^2\sin(\varphi-\psi)=\\&\qquad\qquad=-(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi,\\&m_2l_2^2\ddot\psi+m_2l_1l_2\cos(\varphi-\psi)\,\ddot\varphi-m_2l_1l_2\dot\varphi^2\sin(\varphi-\psi)=\\&\qquad\qquad=-m_2gl_2\sin\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(3.35)$$

Рассмотрим два случая введения дополнительной связи.

1) Пусть $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)=y_1=0$ (рис. 3.10). Для этого случая уравнения (3.34) имеют вид

$$(m_1+m_2)\,l_1^2\ddot\varphi+m_2l_1l_2\cos(\varphi-\psi)\,\ddot\psi+m_2l_1l_2\dot\psi^2\sin(\varphi-\psi)=$$
$$=-(m_1+m_2)\,gl_1\sin\varphi+\lambda l_1\cos\varphi,$$
$$m_2l_2^2\ddot\psi+m_2l_1l_2\cos(\varphi-\psi)\,\ddot\varphi-m_2l_1l_2\dot\varphi^2\sin(\varphi-\psi)=-m_2gl_2\sin\psi.$$

Присоединим к этим двум дифференциальным уравнениям движения уравнение связи

$$y_1=l_1\sin\varphi=0.$$

Из этого уравнения связи следует, что $\varphi\equiv0$, и, следовательно $\dot\varphi=0$, $\ddot\varphi=0$ (т. е. точка M_1 неподвижна). Второе дифференциальное

уравнение вырождается в уравнение колебаний простого математического маятника

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l_2}\sin\psi = 0.$$

Из первого дифференциального уравнения находим λ:

$$\lambda = m_2 l_2 \cos\psi\ddot{\psi} - m_2 l_2 \dot{\psi}^2 \sin\psi.$$

Так как

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l_2}\sin\psi,$$

а

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 - 2\frac{g}{l_2}(1-\cos\psi)\ ^*),$$

то

$$\lambda = -\sin\psi\left[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g(2 - 3\cos\psi)\right].$$

В соответствии с (3.31) имеем

$$R'_x = 0,$$

$$R'_y = \lambda = -\sin\psi\left[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g(2 - 3\cos\psi)\right],$$

т. е. дополнительная сила реакции равна проекции реакции, действующей на точку M_2, на направление оси y (см. стр. 51).

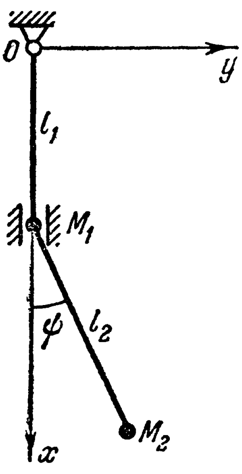

Рис. 3.10.

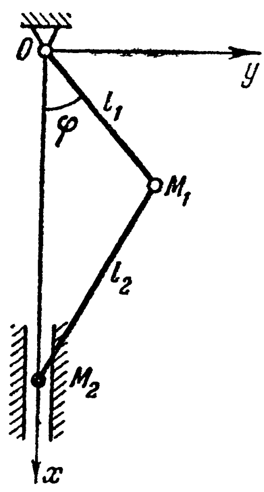

Рис. 3.11.

2) Пусть теперь дополнительная связь принуждает груз M_2 двигаться только вдоль оси x (рис. 3.11). Уравнением этой связи будет

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = y_2 = l_1\sin\varphi + l_2\sin\psi = 0.$$

*) Начальные условия: при $t = 0$, $\psi = 0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ (см. стр. 50).

Для того чтобы получить уравнения (3.34), следует к правой части первого дифференциального уравнения движения прибавить член

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lambda l_1 \cos \varphi,$$

а к правой части второго дифференциального уравнения — член

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} = \lambda l_2 \cos \psi.$$

Для упрощения выкладок в дальнейшем положим $l_1 = l_2 = l$. В этом случае из уравнения связи следует:

$$\sin \psi = - \sin \varphi,$$

откуда

$$\psi = - \varphi.$$

Подставив этот результат в уравнения движения, получим

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\, l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l^2 \cos 2\varphi \ddot{\varphi} + m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = \\ &\qquad = - (m_1 + m_2)\, gl \sin \varphi + \lambda l \cos \varphi, \\ &- m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l^2 \cos 2\varphi\, \ddot{\varphi} - m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = \\ &\qquad = m_2 gl \sin \varphi + \lambda l \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Вычитая из первого уравнения второе, будем иметь

$$(m_1 + 4m_2 \sin^2 \varphi)\, \ddot{\varphi} + 2m_2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = - (m_1 + 2m_2) \frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Это уравнение служит для определения закона движения полученной системы.

Складывая теперь между собой уравнения (3.36), найдем уравнение для определения λ:

$$\lambda = \frac{m_1 l \ddot{\varphi}}{2 \cos \varphi} + \frac{m_1 g}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Дальнейшее решение задачи заключается в определении из уравнения движения угла φ; после этого по формулам

$$R'_{x2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad R'_{y2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2} = \lambda$$

находится реакция дополнительной связи.

§ 3.6. Обобщенные реакции отброшенных связей*)

Рассмотрим голономную систему с s степенями свободы. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_s$ — обобщенные координаты, определяющие положение системы. Отбросим r связей. Тогда

---

*) А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 327—331.

число степеней свободы увеличится до $s+r$. К старым обобщенным координатам $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$ прибавим r новых $q_{s+1}, q_{s+2}, \ldots, q_{s+r}$ и будем иметь в виду, что при $q_{s+\mu}=0$ $(\mu=1, 2, \ldots, r)$ новая материальная система совпадает с исходной системой. Мы можем представить переход от новой системы к исходной как наложение на новую систему r новых связей вида

$$f_{s+\mu}=q_{s+\mu}=0 \qquad (\mu=1, 2, \ldots, r).$$

Тогда, в соответствии с уравнениями (3.34), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m+\sum_{\mu=1}^{r}\lambda_\mu\frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m} \qquad (m=1, 2, \ldots, s+r),$$

но так как

$$\frac{\partial f_{s+\mu}}{\partial q_m}=\begin{cases}0, & s+\mu\neq m \qquad (m=1, 2, \ldots, s+r),\\ 1, & s+\mu=m \qquad (\mu=1, 2, \ldots, r),\end{cases}$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m \qquad (m=1, 2, \ldots, s),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m+\lambda_m \qquad (m=s+1, \ldots, s+r).$$

Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями связей

$$f_{s+\mu}=q_{s+\mu}=0 \quad (\mu=1,2, \ldots, r).$$

Следовательно, после составления полученных уравнений в них следует положить

$$q_{s+\mu}=0, \quad \dot{q}_{s+\mu}=0, \quad \ddot{q}_{s+\mu}=0 \qquad (\mu=1, 2, \ldots, r).$$

Итак, для получения обобщенных реакций отброшенных связей служат уравнения

$$\lambda_m=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}-Q_m \quad (m=s+1, \ldots, s+r), \tag{3.37}$$

в которых после их составления следует положить

$$q_{s+\mu}=0, \quad \dot{q}_{s+\mu}=0, \quad \ddot{q}_{s+\mu}=0 \qquad (\mu=1, 2, \ldots, r).$$

Пример 27. Тело A массы m_1, подвешенное на пружине жесткостью c, может совершать движение по вертикали. С помощью шарнира к телу A прикреплен невесомый стержень длиной l, на

другом конце которого прикреплено тело B массы m_2. Тело B движется по горизонтальной направляющей (рис 3.12). Пренебрегая трением, определить реакцию направляющей.

Начало координат возьмем в положении тела A при ненапряженной пружине. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем отклонение тела A от его положения при ненапряженной пружине ($q_1 = x_1$). Рассмотрим теперь новую систему, когда отсутствует направляющая. Эта система

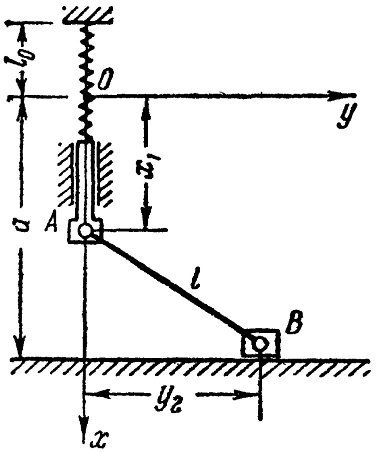

Рис. 3.12.

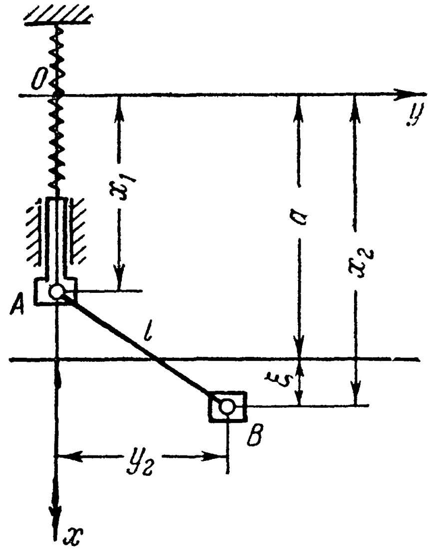

Рис. 3.13.

имеет уже две степени свободы. За обобщенные координаты примем $q_1 = x_1$, $q_2 = \xi$ (рис. 3.13). Координатами тела A и B соответственно будут

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = a + \xi, \quad y_2 = \sqrt{l^2 - (a + \xi - x_1)^2},$$

где a — расстояние от начала координат до направляющей.

Кинетическая энергия системы выразится формулой

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2} \left[\left(m_1 + m_2 K\right) \dot{x}_1^2 - 2 m_2 K \dot{x}_1 \dot{\xi} + m_2 \dot{\xi}^2\right],$$

где

$$K = \frac{(a + \xi - x_1)^2}{l^2 - (a + \xi - x_1)^2}.$$

Найдем теперь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = - m_2 K \dot{x}_1 + m_2 \dot{\xi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \dot{x}_1^2 - m_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} \dot{x}_1 \dot{\xi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = - m_2 K \ddot{x}_1 - m_2 \frac{dK}{dt} \dot{x}_1 + m_2 \ddot{\xi},$$

где

$$\frac{\partial K}{\partial \xi}=\frac{2l^2(a+\xi-x_1)}{[l^2-(a+\xi-x_1)^2]^2},\quad \frac{dK}{dt}=\frac{2l^2(a+\xi-x_1)}{[l^2-(a+\xi-x_1)^2]^2}(\dot\xi-\dot x_1).$$

В соответствии с выражением (3.37) получаем реакцию направляющей, полагая $\xi=0$, $\dot\xi=0$, $\ddot\xi=0$:

$$\lambda_2=-m_2\frac{(a-x_1)^2}{l^2-(a-x_1)^2}\ddot x_1+m_2\frac{l^2(a-x_1)}{[l^2-(a-x_1)^2]^2}\dot x_1^2-Q_2;$$

но так как

$$\delta A=(-cx_1+m_1g)\,\delta x_1+m_2g\,\delta\xi,$$

то

$$Q_1=-cx_1+m_1g,\quad Q_2=m_2g$$

и, следовательно,

$$\lambda_2=-m_2\frac{(a-x_1)^2}{l^2-(a-x_1)^2}\ddot x_1+m_2\frac{l^2(a-x_1)}{[l^2-(a-x_1)^2]^2}\dot x_1^2-m_2g.$$

Уравнение для определения x_1 имеет вид (см. стр. 71)

$$\left[m_1+m_2\frac{(a-x_1)^2}{l^2-(a-x_1)^2}\right]\ddot x_1-\frac{m_2l^2(a-x_1)\,\dot x_1^2}{\left[l^2-(a-x_1)^2\right]^2}=-cx_1+m_1g.$$

Это уравнение Лагранжа, составленное для координаты x_1, в котором положено $\xi=\dot\xi=\ddot\xi=0$.

Пример 28. Тело A массы M может двигаться по гладкой горизонтальной направляющей. К нему на невесомом стержне длины l шарнирно прикреплено тело B массы m (рис. 3,14, a). Найти реакцию направляющей, принимая тела A и B за материальные точки.

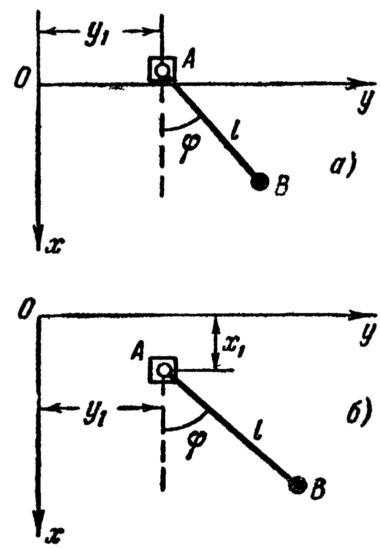

Рис. 3.14.

Примем за обобщенные координаты расстояние y_1 точки A от начала координат и угол φ отклонения стержня от вертикали:

$$q_1=y_1,\quad q_2=\varphi.$$

Отбросим теперь связь, наложенную на тело A, т. е. освободим тело A от направляющей. Новая система имеет три степени свободы, и новая обобщенная координата $q_3=x_1$ (рис. 3.14, $б$). При $x_1\equiv 0$ новая система совпадает с исходной. Пусть координаты точки A — x_1 и y_1, а точки B — x_2, y_2; тогда

$$x_2=x_1+l\cos\varphi,\quad y_2=y_1+l\sin\varphi.$$

Кинетическая энергия определяется выражением

$$T=\frac{1}{2}M\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right)+\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2-2\dot{x}_1l\dot{\varphi}\sin\varphi+2\dot{y}_1l\dot{\varphi}\cos\varphi\right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=(M+m)\,\dot{x}_1-ml\dot{\varphi}\sin\varphi,\qquad \frac{\partial T}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=(M+m)\,\ddot{x}_1-ml\ddot{\varphi}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi.$$

В соответствии с выражением (3.37) получим

$$\lambda_3=-ml\ddot{\varphi}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi-Q_3.$$

Найдем обобщенные силы. Так как

$$\delta A=Mg\,\delta x_1+mg\,\delta x_2=(M+m)\,g\,\delta x_1-m_2gl\sin\varphi\,\delta\varphi,$$

то

$$Q_1=0,\quad Q_2=-mgl\sin\varphi,\quad Q_3=(M+m)\,g$$

и, следовательно,

$$\lambda_3=-ml\ddot{\varphi}\sin\varphi-ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi-(M+m)\,g.$$

Значения φ, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$, которые следует подставить в это выражение, находятся из уравнений Лагранжа второго рода, составленных для координат y_1 и φ, в которых учтено, что $x_1=\dot{x}_1=\ddot{x}_1=0$:

$$\frac{d}{dt}\left[(M+m)\,\dot{y}_1+ml\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0,$$
$$\ddot{\varphi}+\frac{\ddot{y}_1}{l}\cos\varphi+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

§ 3.7. Выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Гироскопические и диссипативные силы

При составлении уравнений Лагранжа второго рода кинетическая энергия системы должна быть выражена через обобщенные координаты и обобщенные скорости. В рассмотренных примерах предыдущего параграфа было показано, как это сделать в частных случаях.

Выразим кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости в общем случае. Для этого сначала нужно радиусы-векторы r_i точек матери-

альной системы определить как функции обобщенных координат, т. е. получить зависимости (3.20):

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ t) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Затем скорости точек материальной системы определяются по формулам

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.38}$$

Подставляя эти скорости (3.38) в выражение для кинетической энергии, получим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p+\sum_{m=1}^{s}B_m\dot{q}_m+T_0, \tag{3.39}$$

где

$$A_{mp}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_p}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_p}+\frac{\partial y_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_p}+\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_p}\right) \tag{3.40}$$

(очевидно, что $A_{mp}=A_{pm}$),

$$B_m=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial t}\right), \tag{3.41}$$

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}m_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z_i}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{3.42}$$

Таким образом, кинетическая энергия нестационарной (реономной) голономной материальной системы может

быть представлена как сумма трех частей: T_2, T_1 и T_0, т. е.

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{3.43}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p \tag{3.44}$$

является однородным многочленом второй степени от обобщенных скоростей.

$$T_1 = \sum_{m=1}^{s} B_m\dot{q}_m \tag{3.45}$$

— многочлен первой степени от обобщенных скоростей;

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

от обобщенных скоростей не зависит.

Для стационарных (склерономных) связей, т. е. связей, для которых

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \equiv 0,$$

кинетическая энергия будет однородной функцией второй степени относительно обобщенных скоростей, т. е.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p. \tag{3.46}$$

Пример 29. Определить кинетическую энергию сферического маятника (рис. 1.6). Груз имеет массу, равную m, длина маятника l.

Рассматриваемая система стационарная. За обобщенные координаты примем $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$. Тогда декартовыми координатами, определяющими положение маятника, будут

$$x = l\cos\theta, \quad y = l\sin\theta\cos\varphi, \quad z = l\sin\theta\sin\varphi.$$

Для определения кинетической энергии по формуле (3.46) следует сначала найти коэффициенты A_{mp}. В соответствии с формулой

(3.40) имеем

$$A_{11} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] = ml_*^2,$$

$$A_{12} = m\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

$$A_{22} = m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right] = ml^2 \sin^2\theta.$$

Следовательно,

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2).$$

Выяснив, что кинетическая энергия нестационарной материальной системы выражается формулой (3.43), определим, как связано изменение кинетической энергии с характером сил, действующих на систему.

Так как кинетическая энергия является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е. $T = T(q_m, \dot{q}_m, t)$, то

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_m}\dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\frac{d}{dt}(\dot{q}_m) + \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \sum_{m=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)\right]\dot{q}_m + \frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m + \frac{\partial T}{\partial t},$$

но так как согласно формуле (3.43) $T = T_2 + T_1 + T_0$, то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m}.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m = 2T_2, \quad \sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m = T_1,$$

следовательно,

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m = 2T_2 + T_1.$$

Если теперь учесть выражения (3.29), то для $\frac{dT}{dt}$ получим

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{m=1}^{s} Q_m \dot{q}_m + \frac{d}{dt}(2T_1 + T_1) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

где Q_m — обобщенные силы. На основании формулы (3.43) можем записать

$$2T_2 + T_1 = 2T - (T_1 + 2T_0);$$

тогда

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{m=1}^{s} Q_m \dot{q}_m + \frac{d}{dt}(2T) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{m=1}^{s} Q_m \dot{q}_m + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Полученная формула определяет изменение кинетической энергии материальной системы при любом ее движении.

Рассмотрим случай стационарных связей. Для них $T = T_2$ и

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{m=1}^{s} Q_m \dot{q}_m.$$

Рассмотрим частные случаи сил, являющихся линейными и однородными функциями обобщенных координат, т. е.

$$Q_m = \sum_{\mu=1}^{s} B_{m\mu} \dot{q}_\mu.$$

Если $B_{m\mu} = \gamma_{m\mu}$, где

$$\gamma_{m\mu} = -\gamma_{\mu m} \quad \text{и} \quad \gamma_{\mu\mu} = 0 \qquad (m,\ \gamma = 1, 2, \ldots, s),$$

то

$$Q_m = \sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{m\mu} \dot{q}_\mu$$

называются *гироскопическими* силами. Покажем, что эти силы не вызывают изменения кинетической энергии *). Так как

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{m=1}^{s}Q_m\dot{q}_m=\sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\gamma_{m\mu}\dot{q}_m\dot{q}_\mu,$$

то можно записать

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{m=1}^{s}\gamma_{mm}\dot{q}_m^2+\sum_{m=1}^{s-1}\sum_{\mu=m+1}^{s}(\gamma_{m\mu}+\gamma_{\mu m})\,\dot{q}_m\dot{q}_\mu,$$

и, следовательно, в силу условий, наложенных на коэффициенты $\gamma_{m\mu}$ $(\gamma_{mm}=0,\ \gamma_{m\mu}=-\gamma_{\mu m})$,

$$\frac{dT}{dt}=0.$$

Это значит, что работа гироскопических сил равна нулю. Пусть теперь

$$B_{m\mu}=-\beta_{m\mu},$$

где

$$\beta_{m\mu}=\beta_{\mu m}.$$

Тогда $Q_m=-\sum\limits_{\mu=1}^{s}\beta_{m\mu}\dot{q}_\mu$ и

$$\frac{dT}{dt}=-\sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\beta_{m\mu}\dot{q}_m\dot{q}_\mu.$$

Если квадратичная форма $\sum\limits_{m=1}^{s}\sum\limits_{\mu=1}^{s}\beta_{m\mu}\dot{q}_m\dot{q}_\mu>0$, то

$$\frac{dT}{dt}<0,$$

т. е. кинетическая энергия убывает. Силы

$$Q_m=-\sum_{\mu=1}^{s}\beta_{m\mu}\dot{q}_\mu$$

называются *диссипативными.*

---

*) Подробнее о гироскопических силах см. в монографии Д. Р. Меркина, Гироскопические системы, Гостехиздат, 1956.

§ 3.8. Уравнения Лагранжа в квазикоординатах

Введем в рассмотрение величины $d\pi_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$, которыми обозначим линейные комбинации дифференциалов обобщенных координат:

$$d\pi_\lambda = \alpha_{\lambda 1}\, dq_1 + \alpha_{\lambda 2}\, dq_2 + \ldots + \alpha_{\lambda s}\, dq_s = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m}\, dq_m, \tag{3.47}$$

где $\alpha_{\lambda m}$ могут быть функциями обобщенных координат.

Для того чтобы $d\pi_\lambda$ в выражении (3.47) были полными дифференциалами достаточно выполнения условий

$$\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu \nu}}{\partial q_m} = 0 \qquad (\mu,\ m,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3.48}$$

В этом случае π_λ могут быть приняты за обычные обобщенные координаты.

Мы будем рассматривать случаи, когда

$$\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu \nu}}{\partial q_m} \neq 0, \tag{3.49}$$

т. е. когда выражения (3.47) не являются полными дифференциалами. Если бы обобщенные координаты q_1, q_2, ..., q_s нам были известны как функции времени, то величины π_λ можно было бы определить по формулам

$$\pi_\lambda = \int_0^t \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \dot{q}_m\, dt.$$

Эти величины уже не являются функциями положения материальной системы и не могут быть приняты за обобщенные координаты. Поясним это на примере. Как известно*), проекции угловой скорости твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, на оси, жестко связанные с телом, выражаются формулами Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}.$$

---

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1970.

Введем величины

$$d\pi_1 = d\psi \sin\theta \sin\varphi + d\theta \cos\varphi = \omega_x\, dt,$$
$$d\pi_2 = d\psi \sin\theta \cos\varphi - d\theta \sin\varphi = \omega_y\, dt,$$
$$d\pi_3 = d\psi \cos\theta + d\varphi = \omega_z\, dt.$$

Предположим, что углы Эйлера θ, ψ и φ нам известны как функции времени. Тогда величины π_1, π_2, π_3 можно было бы определить по формулам

$$\pi_1 = \int_0^t \omega_x\, dt, \quad \pi_2 = \int_0^t \omega_y\, dt, \quad \pi_3 = \int_0^t \omega_z\, dt,$$

т. е. величины π_1, π_2, π_3 представляли бы собой углы поворота тела соответственно относительно осей x, y и z. Однако эти углы не определяют однозначно положения тела, так как, поворачивая тело на эти углы в разной последовательности, мы придем к различным положениям тела *). Несмотря на это, мы примем π_λ за обобщенные координаты и будем их называть *квазикоординатами* (псевдокоординатами). Величины

$$\frac{d\pi_\lambda}{dt} = \dot{\pi}_\lambda = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \dot{q}_m \tag{3.50}$$

называются *квазискоростями*.

В соответствии с выражением (3.50) определим вариации квазикоординат с помощью выражений

$$\delta\pi_\lambda = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m}\, \delta q_m. \tag{3.51}$$

Предполагая, что определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{ss} \end{vmatrix} \neq 0,$$

*) Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Динамика неголономных систем § 8, «Наука», 1967.

из соотношений (3.50) можем получить

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda}\dot{\pi}_\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s) \tag{3.52}$$

и

$$\delta q_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda}\,\delta\pi_\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.53}$$

Подставляя $\dot{\pi}_\lambda$, определяемое формулой (3.50), в выражение (3.52), имеем

$$\dot{q}_m = \sum_{\lambda=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\lambda}\alpha_{\lambda\mu}\dot{q}_\mu \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda}\alpha_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & m=\mu, \\ 0, & m\neq\mu. \end{cases} \tag{3.54}$$

Перейдем к выводу уравнений Лагранжа в квазикоординатах. Каждое из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

умножим на соответствующий коэффициент $\beta_{m\lambda}$ и просуммируем по m:

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right] = \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda}Q_m \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.55}$$

Виртуальная работа равна

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s} Q_m\,\delta q_m.$$

В соответствии с выражением (3.53)

$$\delta q_m = \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda}\,\delta\pi_\lambda \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s);$$

следовательно,

$$\delta A = \sum_{m=1}^{s}\sum_{\lambda=1}^{s} Q_m\beta_{m\lambda}\,\delta\pi_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{s} P_\lambda\,\delta\pi_\lambda,$$

где

$$P_\lambda = \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} Q_m \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.56}$$

Величины P_λ называются *квазиобобщенными силами.* Итак,

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} \right] = P_\lambda \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.57}$$

Заменяя в выражении для кинетической энергии обобщенные скорости $\dot q_m$ с помощью формулы (3.52) на $\dot\pi_\lambda$, получим

$$T \left(q_m,\ \dot q_m \equiv \sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{m\lambda} \dot\pi_\lambda \right) = T' (q_m, \dot\pi_m) \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.58}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_m} = \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \cdot \frac{\partial \dot\pi_\mu}{\partial \dot q_m} = \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \alpha_{\mu m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{\partial T'}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \cdot \frac{\partial \dot\pi_\mu}{\partial q_m} =$$

$$= \frac{\partial T'}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m} \dot q_\nu \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{3.60}$$

так как в силу (3.50)

$$\frac{\partial \dot\pi_\mu}{\partial q_m} = \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m} \dot q_\nu \qquad (\mu,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Подставим выражения (3.59) и (3.60) в уравнения (3.55):

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \alpha_{\mu m} \right) \right] - \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} \frac{\partial T'}{\partial q_m} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda} \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m} \dot q_\nu = P_\lambda \quad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.61}$$

Имея в виду, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\alpha_{\mu m}\right) = \alpha_{\mu m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\right) + \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\frac{d\alpha_{\mu m}}{dt} =$$
$$= \alpha_{\mu m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\right) + \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu \qquad (\mu,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

перепишем (3.61) в виде

$$\sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\beta_{m\lambda}\alpha_{\mu m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\right) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu -$$
$$- \sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m}\dot{q}_\nu - \sum_{m=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial q_m} = P_\lambda$$

или, в соответствии с условием (3.54) и формулой (3.52),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\lambda}\right) - \sum_{m=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial q_m} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_{m\lambda}\beta_{\nu j}\left(\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m}\right)\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j = P_\lambda$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Обозначая

$$\gamma_{\lambda\mu j} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\beta_{m\lambda}\beta_{\nu j}\left(\frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial q_m}\right) \tag{3.62}$$
$$(\lambda,\ \mu,\ j = 1,\ 2,\ \ldots.\ s),$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\lambda}\right) - \sum_{m=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j\gamma_{\lambda\mu j} = P_\lambda \tag{3.63}$$
$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Вводя чисто условное обозначение

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_\lambda} = \sum_{m=1}^{s}\beta_{m\lambda}\frac{\partial T'}{\partial q_m}, \tag{3.64}$$

найдем, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\lambda}\right) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \gamma_{\lambda\mu j} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu} \dot{\pi}_j = P_\lambda \tag{3.65}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Эти уравнения носят название уравнений Эйлера — Лагранжа. Отметим, что коэффициенты $\gamma_{\lambda\mu j}$ не зависят от структуры и движения механической системы, а их значение зависит только от определения величин $\dot{\pi}_\lambda$ через обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$.

Из формулы (3.62) следует, что

$$\gamma_{j\mu\lambda} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{mj}\beta_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial a_{\mu m}}{\partial q_\nu} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial q_m}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\lambda}\beta_{\nu j}\left(\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial q_m} - \frac{\partial a_{\mu m}}{\partial q_\nu}\right) \tag{3.66}$$

$$(j, \mu, \lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Сравнив формулы (3.62) и (3.66), получим, что

$$\gamma_{\lambda\mu j} = -\gamma_{j\mu\lambda} \qquad (\lambda, \mu, j = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.67}$$

Отсюда

$$\gamma_{\lambda\mu\lambda} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.68}$$

Рассмотрим способ нахождения трехиндексных коэффициентов $\gamma_{\lambda\mu j}$ при помощи перестановочных соотношений. Для этого используем зависимости (3.47) и (3.51):

$$d\pi_\lambda = \sum_{m=1}^{s} a_{\lambda m}\, dq_m \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.69}$$

$$\delta\pi_\lambda = \sum_{m=1}^{s} a_{\lambda m}\, \delta q_m \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.70}$$

Из формулы (3.69) следует, что

$$dq_m = \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\nu}\, d\pi_\nu \qquad (m = 1, 2, \ldots, s) \tag{3.71}$$

и

$$\delta q_m = \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\nu}\,\delta\pi_\nu \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{3.72}$$

Применим операцию нахождения дифференциала к соотношению (3.70):

$$d\,(\delta\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} d\,(\delta q_m) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j}\, dq_j\, \delta q_m$$

$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Используя равенства (3.71) и (3.72), получим

$$d\,(\delta\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} d\,(\delta q_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j} \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{j\nu}\, d\pi_\nu \sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu}\, \delta\pi_\mu =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} d\,(\delta q_m) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{j\nu}\beta_{m\mu} \frac{\partial \alpha_{\mu m}}{\partial q_j}\, d\pi_\nu\, \delta\pi_\mu \tag{3.73}$$

$$(\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Применим теперь операцию варьирования к соотношению (3.71):

$$\delta\,(d\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \delta\,(dq_m) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j}\, \delta q_j\, dq_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \delta\,(dq_m) + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j} \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{j\nu}\, \delta\pi_\nu \sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu}\, d\pi_\mu,$$

$$\delta\,(d\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m} \delta\,(dq_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{j\nu}\beta_{m\mu} \frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j}\, \delta\pi_\nu\, d\pi_\mu \qquad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Меняя во второй сумме этого выражения индексы ν и μ, j и m местами, получим

$$\delta(d\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m}\delta(dq_m) + \\ + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu}\beta_{j\nu}\frac{\partial \alpha_{\lambda j}}{\partial q_m}\delta\pi_\mu\, d\pi_\nu \quad (3.74)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Найдем разность выражений (3.73) и (3.74):

$$d(\delta\pi_\lambda) - \delta(d\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m}[d(\delta q_m) - \delta(dq_m)] + \\ + \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \beta_{m\mu}\beta_{j\nu}\left(\frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_{\lambda j}}{\partial q_m}\right) d\pi_\lambda\, \delta\pi_\mu$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Согласно выражению (3.62)

$$\gamma_{\mu\lambda\nu} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \beta_{m\mu}\beta_{j\nu}\left(\frac{\partial \alpha_{\lambda m}}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_{\lambda j}}{\partial q_m}\right),$$

и, следовательно,

$$d(\delta\pi_\lambda) - \delta(d\pi_\lambda) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\lambda m}[d(\delta q_m) - \delta(dq_m)] + \\ + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{\mu\lambda\nu}\,\delta\pi_\mu\, d\pi_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Полученные соотношения называются *перестановочными*.

Так как $d(\delta q_m) - \delta(dq_m) = 0$ *), то

$$d(\delta\pi_\lambda) - \delta(d\pi_\lambda) = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{\mu\lambda\nu}\,\delta\pi_\mu\, d\pi_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s). \quad (3.75)$$

---

*) Пусть $q_j(t)$ — обобщенные координаты, определяющие положение материальной системы в момент времени t. При сообщении системе виртуального перемещения ее положение в тот же момент времени t определяется координатами

$$q'_j(t) = q_j(t) + \delta q_j,$$

Применим уравнения Эйлера — Лагранжа (3.65) к выводу уравнений движения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Положение тела будем определять углами Эйлера *). Примем

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi.$$

Кинетическая энергия твердого тела при условии, что оси x, y и z жестко связаны с телом и являются главными осями инерции для неподвижной точки тела, равна

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right), \tag{3.76}$$

где I_x, I_y, I_z — осевые моменты инерции тела, а ω_x, ω_y и ω_z — проекции угловой скорости тела соответственно на оси x, y и z. Проекции угловой скорости связаны с углами Эйлера и их производными кинематическими формулами Эйлера:

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi.$$

Примем за квазискорости проекции угловой скорости, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \dot\pi_1 &= \dot q_1 \cos q_2 + \dot q_3 \sin q_1 \sin q_2, \\ \dot\pi_2 &= -\dot q_1 \sin q_2 + \dot q_3 \sin q_1 \cos q_2, \\ \dot\pi_3 &= \dot q_2 + \dot q_3 \cos q_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.77}$$

где

$$\delta q_j = q'_j(t) - q_j(t)$$

— вариации координат.

Аналогично вариации обобщенных скоростей можно представить в виде

$$\delta\dot q_j = \dot q'_j(t) - \dot q_j(t),$$

но

$$\dot q'(t) - \dot q(t) = \frac{d}{dt}\left[q_j(t) + \delta q_j\right] - \frac{d}{dt}\left[q_j(t)\right] = \frac{d}{dt}\delta q_j.$$

Следовательно,

$$\delta\dot q_j = \frac{d}{dt}\delta q_j,$$

или

$$\delta\, dq_j = d\,\delta d_j.$$

Доказательство этого свойства в случае неголономных связей подробно рассмотрено в книге Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, Динамика неголономных систем, «Наука», 1967.

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1969.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}=\cos q_2, && \alpha_{12}=0, && \alpha_{13}=\sin q_1 \sin q_2,\\
&\alpha_{21}=-\sin q_2, && \alpha_{22}=0, && \alpha_{23}=\sin q_1 \cos q_2,\\
&\alpha_{31}=0, && \alpha_{32}=1, && \alpha_{33}=\cos q_1.
\end{aligned}$$

Из соотношений (3.77) получим

$$\begin{aligned}
\dot q_1 &= \cos q_2\,\dot\pi_1-\sin q_2\,\dot\pi_2,\\
\dot q_2 &= -\frac{\cos q_1 \sin q_2}{\sin q_1}\dot\pi_1-\frac{\cos q_1\cos q_2}{\sin q_1}\dot\pi_2+\dot\pi_3,\\
\dot q_3 &= \frac{\sin q_2}{\sin q_1}\dot\pi_1+\frac{\cos q_2}{\sin q_1}\dot\pi_2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\beta_{11}=\cos q_2, && \beta_{12}=-\sin q_2, && \beta_{13}=0,\\
&\beta_{21}=-\frac{\cos q_1\sin q_2}{\sin q_1}, && \beta_{22}=-\frac{\cos q_1\cos q_2}{\sin q_1}, && \beta_{23}=1,\\
&\beta_{31}=\frac{\sin q_2}{\sin q_1}, && \beta_{32}=\frac{\cos q_2}{\sin q_1}, && \beta_{33}=0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$T'=\frac{1}{2}\left(I_x\dot\pi_1^2+I_y\dot\pi_2^2+I_z\dot\pi_3^2\right),$$

Формулы для подсчета $\gamma_{\lambda\mu j}$ имеют вид

$$\gamma_{\lambda\mu j}=(\beta_{1\lambda}\beta_{2j}-\beta_{2\lambda}\beta_{1j})\left(\frac{\partial\alpha_{\mu 1}}{\partial q_2}-\frac{\partial\alpha_{\mu 2}}{\partial q_1}\right)+ \\ +\frac{\partial\alpha_{\mu 3}}{\partial q_1}(\beta_{3\lambda}\beta_{1j}-\beta_{1\lambda}\beta_{3j})+\frac{\partial\alpha_{\mu 3}}{\partial q_2}(\beta_{3\lambda}\beta_{2j}-\beta_{2\lambda}\beta_{3j}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\gamma_{123}=-1, && \gamma_{132}=1,\\
&\gamma_{231}=-1, && \gamma_{213}=1,\\
&\gamma_{312}=-1, && \gamma_{321}=1.
\end{aligned}$$

Все остальные γ равны нулю.

Уравнения Эйлера — Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(I_x\dot\pi_1)-I_y\dot\pi_2\dot\pi_3+I_z\dot\pi_3\dot\pi_2=P_1,\\
&\frac{d}{dt}(I_y\dot\pi_2)-I_z\dot\pi_3\dot\pi_1+I_x\dot\pi_1\dot\pi_3=P_2,\\
&\frac{d}{dt}(I_z\dot\pi_3)-I_x\dot\pi_1\dot\pi_2+I_y\dot\pi_2\dot\pi_1=P_3,
\end{aligned}$$

или

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z (I_z - I_y) = M_x,$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z (I_x - I_z) = M_y,$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y (I_y - I_z) = M_z,$$

где M_x, M_y, M_z — моменты сил соответственно относительно осей x, y, z.

Пример 30. Вывод уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе с учетом массы кардановых колец.

Схема гироскопа представлена на рис. 3.15. Начало координат выберем в точке пересечения осей карданова подвеса. Подвижную систему координат свяжем с внутренним кольцом, направив ось Ox

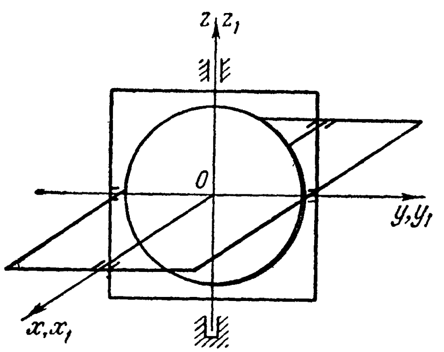

Рис. 3.15.

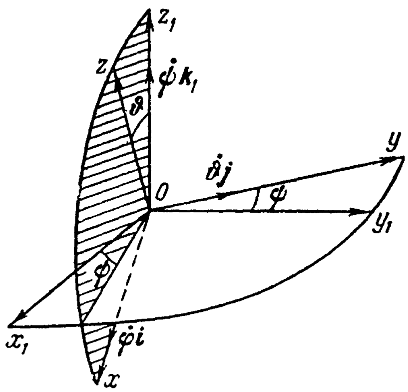

Рис. 3.16.

по оси вращения ротора, ось Oy — по оси вращения внутреннего кольца. Ось Oz_1 неподвижной системы координат направлена по оси вращения наружного кольца. Тогда положение подвижной системы координат $Oxyz$ по отношению к неподвижной $Ox_1y_1z_1$ определится двумя углами ψ и ϑ. Угол вращения ротора вокруг оси Ox обозначим через φ (рис. 3.16). Проекции угловой скорости наружного кольца равны

$$\omega_{\text{н}x_1} = 0, \quad \omega_{\text{н}y_1} = 0, \quad \omega_{\text{н}z_1} = \dot\psi.$$

Проекции угловой скорости внутреннего кольца и ротора соответственно равны

$$\omega_{\text{в}x} = -\dot\psi \sin\vartheta, \qquad \omega_{\text{в}y} = \dot\vartheta, \qquad \omega_{\text{в}z} = \dot\psi \cos\vartheta$$

$$\omega_x = \dot\varphi - \dot\psi \sin\vartheta, \qquad \omega_y = \dot\vartheta, \qquad \omega_z = \dot\psi \cos\vartheta.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{н}z_1}\dot\psi^2 + \frac{1}{2}\left(I_{\text{в}x}\omega_{\text{в}x}^2 + I_{\text{в}y}\omega_{\text{в}y}^2 + I_{\text{в}z}\omega_{\text{в}z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right),$$

где $I_{\text{н}z_1}$ — момент инерции наружного кольца относительно оси Oz_1, $I_{\text{в}x}$, $I_{\text{в}y}$, $I_{\text{в}z}$ — моменты инерции внутреннего кольца, I_x, I_y, I_z — моменты инерции ротора. В силу симметрии имеем $I_{\text{в}x} = I_{\text{в}y}$ и $I_y = I_z$. За обобщенные координаты примем

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \vartheta, \quad q_3 = \varphi,$$

а за квазискорости

$$\left.\begin{aligned} \dot\pi_1 &= \omega_x = \dot\varphi - \dot\psi \sin\vartheta = -\dot q_1 \sin q_2 + \dot q_3, \\ \dot\pi_2 &= \omega_y = \dot\vartheta = \dot q_2, \\ \dot\pi_3 &= \omega_z = \dot\psi\cos\vartheta = \dot q_1 \cos q_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.78}$$

Из соотношений (3.78) получаем

$$\dot q_1 = \frac{1}{\cos q_2}\dot\pi_3, \quad \dot q_2 = \dot\pi_2, \quad \dot q_3 = \dot\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}\dot\pi_3.$$

Таким образом, имеем

$$T' = \frac{1}{2}\left[I_x\dot\pi_1^2 + I_2\dot\pi_2^2 + I_3(q_2)\,\dot\pi_3^2\right], \tag{3.79}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= I_{\text{в}x} + I_z, \\ I_3(q_2) &= \frac{I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}z} + I_z + (I_{\text{в}x} - I_{\text{в}z} - I_z)\sin^2 q_2}{\cos^2 q_2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.80}$$

Так как для рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} d\pi_1 &= -\sin q_2\,dq_1 + dq_3, & \delta\pi_1 &= -\sin q_2\,\delta q_2 + \delta q_3, \\ d\pi_2 &= dq_2, & \delta\pi_2 &= \delta q_2, \\ d\pi_3 &= \cos q_2\,dq_1, & \delta\pi_3 &= \cos q_2\,\delta q_1, \\ dq_1 &= \frac{d\pi_3}{\cos q_2}, & \delta q_1 &= \frac{\delta\pi_3}{\cos q_2}, \\ dq_2 &= d\pi_2, & \delta q_2 &= \delta\pi_2, \\ dq_3 &= d\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}d\pi_3, & \delta q_3 &= \delta\pi_1 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}\delta\pi_3, \end{aligned}$$

то в соответствии с формулой (3.75)

$$d(\delta\pi_1) - \delta(d\pi_1) = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{\mu 1\nu}\,\delta\pi_\mu\,d\pi_\nu = -\delta\pi_3\,d\pi_2 + \delta\pi_2\,d\pi_3,$$

$$d(\delta\pi_2) - \delta(d\pi_2) = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{\mu 2\nu}\,\delta\pi_\mu\,d\pi_\nu = 0,$$

$$d(\delta\pi_3) - \delta(d\pi_3) = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma_{\mu 3\nu}\,\delta\pi_\mu\,d\pi_\nu = \\ = -\frac{\sin q_2}{\cos q_2}\delta\pi_3\,d\pi_2 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}\delta\pi_2\,d\pi_3.$$

Отсюда

$$\gamma_{213} = -\gamma_{312} = 1, \quad \gamma_{233} = -\gamma_{332} = \frac{\sin q_2}{\cos q_2}.$$

Остальные γ равны нулю. Найдем теперь производные от T' по $\dot{\pi}_1$, $\dot{\pi}_2$, $\dot{\pi}_3$:

$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_1} = I_x\dot{\pi}_1, \quad \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_2} = I_2\dot{\pi}_2, \quad \frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_3} = I_3(q_2)\dot{\pi}_3.$$

Далее находим

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_1} = \sum_{m=1}^{3} \beta_{m1}\frac{\partial T'}{\partial q_m} = 0,$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_2} = \sum_{m=1}^{3} \beta_{m2}\frac{\partial T'}{\partial q_m} = \frac{\partial T'}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\dot{\pi}_3^2\frac{\partial I_3}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_3} = \sum_{m=1}^{3} \beta_{m3}\frac{\partial T'}{\partial q_m} = 0.$$

Уравнениями движения в квазикоордннатах будут

$$\frac{d}{dt}(I_x\dot{\pi}_1) = P_1 = M_x,$$

$$\frac{d}{dt}(I_2\dot{\pi}_2) - \frac{1}{2}\dot{\pi}_3^2 - \frac{\partial I_3}{\partial q_2} + I_x\dot{\pi}_1\dot{\pi}_3 + \frac{\sin q_2}{\cos q_2}I_3(q_2)\dot{\pi}_3^2 = P_2 = M_y,$$

$$\frac{d}{dt}[I_3(q_2)\dot{\pi}_3] - I_x\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 - \frac{\sin q_2}{\cos q_2}I_3(q_2)\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 = P_3 = M_z.$$

Переходя к обобщенным координатам, получим

$$I_x\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta) = M_x,$$

$$I_2\ddot{\vartheta} - \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\cos^2\vartheta\frac{dI_3}{d\vartheta} + I_x(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta)\dot{\psi}\cos\vartheta + \\ + \sin\vartheta I_3(\vartheta)\dot{\psi}^2\cos\vartheta = M_y.$$

$$\frac{d}{dt}[I_3(\vartheta)\dot{\psi}\cos\vartheta] - I_x(\bar{\varphi} - \dot{\psi}\sin\vartheta)\dot{\vartheta} - \sin\vartheta I_3(\vartheta)\dot{\psi}\dot{\vartheta} = M_z.$$

Так как

$$\frac{dI_3}{d\vartheta} = 2(I_{\text{н}z_1} + I_{\text{в}x})\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta},$$

то окончательно будем иметь

$$\frac{d}{dt}[I_x(\dot\varphi - \dot\psi\sin\vartheta)] = M_x,$$

$$(I_{\text{в}x}+I_z)\ddot\vartheta + I_x(\dot\varphi-\dot\psi\sin\vartheta)\dot\psi\cos\vartheta+(I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = M_y$$

$$[I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_z+(I_{\text{в}x}-I_{\text{в}z}-I_z)\sin^2\vartheta]\ddot\psi - I_x(\dot\varphi-\dot\psi\sin\vartheta)\dot\vartheta\cos\vartheta -$$

$$-2(I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot\psi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta = M_z\cos\vartheta.$$

Так как $\delta A = M_x\,\delta\varphi + M_y\,\delta\vartheta + M_{z_1}\delta\psi$, где M_{z_1} — момент всех сил относительно неподвижной оси Oz_1, а

$$\delta\varphi = \delta q_3 = \delta\pi_1 + \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\delta\pi_3,$$

$$\delta\vartheta = \delta q_2 = \delta\pi_2, \quad \delta\psi = \delta q_1 = \frac{1}{\cos\vartheta}\delta\pi_3,$$

то

$$\delta A = M_x\,\delta\pi_1 + M_y\,\delta\pi_2 + \left(M_x\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} + M_{z_1}\frac{1}{\cos\vartheta}\right)\delta\pi_3.$$

С другой стороны,

$$\delta A = M_x\,\delta\pi_1 + M_y\,\delta\pi_2 + M_z\,\delta\pi_3,$$

следовательно,

$$M_z = M_{z_1}\frac{1}{\cos\vartheta} + M_x\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta},$$

или

$$M_z\cos\vartheta = M_{z_1} + M_x\sin\vartheta.$$

В гироскопических приборах обычно $M_x = 0$. Тогда

$$\dot\varphi - \dot\psi\sin\vartheta = \Omega = \text{const}$$

и уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе будут иметь вид

$$(I_{\text{в}x}+I_z)\ddot\vartheta + I_x\Omega\dot\psi\cos\vartheta + (I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = M_y,$$

$$[I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_z+(I_{\text{в}x}-I_{\text{в}z}-I_z)\sin^2\vartheta]\ddot\psi - I_x\Omega\dot\vartheta\cos\vartheta -$$

$$-2(I_{\text{в}z}+I_z-I_{\text{в}x})\dot\psi\dot\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta = M_{z_1}.$$

В современных гироскопических приборах угловая скорость собственного вращения ротора $\dot\varphi$ много больше угловых скоростей $\dot\psi$ и $\dot\vartheta$. Принимая это во внимание и считая угол ϑ малым, получим

$$(I_{\text{в}x}+I_z)\ddot\vartheta + I_x\Omega\dot\psi = M_y, \qquad (I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_z)\ddot\psi - I_x\Omega\dot\vartheta = M_{z_1}$$

Эти уравнения называются «техническими» уравнениями движения гироскопа в кардановом подвесе.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 4.1. Уравнения Лагранжа второго рода в случае потенциальных сил

Обобщенные силы называются *потенциальными*, если существует функция

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots q_s, t), \tag{4.1}$$

частными производными от которой по обобщенным координатам, взятыми с обратным знаком, являются эти силы, т. е.

$$Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{4.2}$$

Функция (4.1) называется потенциальной энергией. В § 2.3 нами был рассмотрен частный случай потенциальных сил — консервативные силы — и была установлена формула (2.9), аналогичная формуле (4.2).

Используя формулу (4.2), перепишем уравнения (3.29) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L = T - \Pi, \tag{4.3}$$

которая называется *функцией Лагранжа* или кинетическим потенциалом. Так как потенциальная энергия от обобщенных скоростей не зависит, то

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_m} \equiv 0$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{4.4}$$

Из структуры уравнений (4.4) видно, что если вместо функции L выбрать другую функцию $L_1 = L + f(t)$, где $f(t)$ — любая функция времени, то функция L_1 тоже будет удовлетворять уравнениям (4.4). То же самое будет, если вместо L взять $L_1 = cL$, где c — любое постоянное число, кроме нуля. Существуют и другие преобразования, относительно которых уравнения Лагранжа инвариантны *).

Пример 31. Составить уравнения (4.4) для материальной системы, схема которой представлена на рис. 4.1. Прямая, по которой

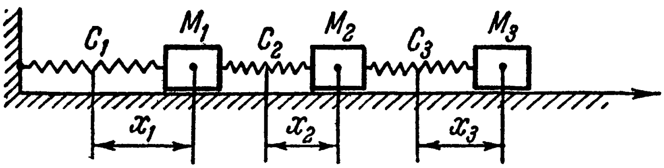

Рис. 4.1.

движутся грузы M_1, M_2 и M_3, абсолютно гладкая. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2 и m_3, а жесткости пружин c_1, c_2 и c_3.

За обобщенные координаты примем расстояния грузов от положения, при котором все пружины находятся в ненапряженном состоянии. Пусть $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $q_3 = x_3$. Кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3\dot{x}_3^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1x_1^2 + \frac{1}{2} c_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} c_3(x_3 - x_2)^2,$$

Составим функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и найдем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3\dot{x}_3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1), \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -c_3(x_3 - x_2).$$

*) Подробнее об инвариантности уравнений Лагранжа можно прочесть в книге И. М. Беленького, Введение в аналитическую механику, «Высшая школа», 1964.

Следовательно, уравнения (4.4) для рассматриваемого случая будут иметь вид

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0,$$
$$m\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) - c_3(x_3 - x_1) = 0,$$
$$m\ddot{x}_3 + c_3(x_3 - x_2) = 0.$$

Пример 32. Составить уравнения движения материальной системы, состоящей из двух тяжелых однородных стержней равной длины l, шарнирно соединенных между собой в точке A (рис. 4.2).

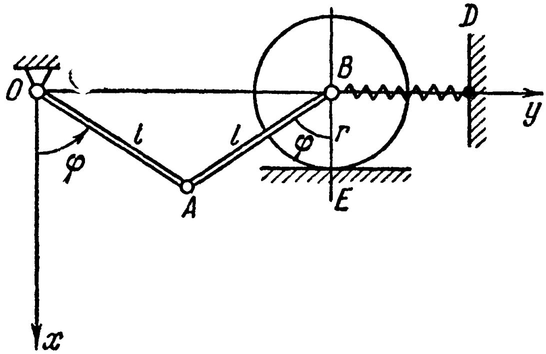

Рис. 4.2.

Конец одного стержня шарнирно укреплен в неподвижной точке O; конец другого стержня шарнирно укреплен в центре однородного диска радиуса r и массы M. Диск катится без скольжения. Центр диска соединен с неподвижной точкой D пружиной жесткости c. Пружина находится в ненапряженном состоянии при вертикальном положении стержней. Масса каждого из стержней — m.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ (угол между осью x и стержнем OA), т. е. $q = \varphi$. Запишем координаты центра масс стержня OA:

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_1 = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

стержня AB:

$$x_2 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_2 = l\sin\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{3}{2}l\sin\varphi,$$

диска (точки B):

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 2l\sin\varphi$$

(так как $OA = AB = l$).

Кинетическая энергия системы равна *)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2,$$

*) При нахождении кинетической энергии стержня AB и диска применяем теорему Кёнига.

где I_O — момент инерции стержня OA относительно точки O, I — момент инерции стержня AB относительно его центра масс, I_B — момент инерции диска относительно его центра, ω — угловая скорость диска. Найдем теперь v_2^2, v_B^2 и угловую скорость ω диска. Очевидно, что

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \frac{l^2}{4}(1 + 8\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2,$$

$$v_B^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v_B}{r} = \frac{2l}{r}\,\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2}(K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2,$$

где

$$K = I_O + I + m\frac{l^2}{4} = \frac{2}{3}ml^2,$$

$$N = 2ml^2 + 6Ml^2 = 2l^2(m + 3M),$$

так как $I_B = \dfrac{Mr^2}{2}$, $I_O = \dfrac{ml^2}{3}$, $I = \dfrac{ml^2}{12}$.

Потенциальная энергия равна

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2 + \frac{1}{2}cy_3^2 = -mgl\cos\varphi + 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Далее находим

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = (K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -N\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi - 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Напишем теперь уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}[(K + N\cos^2\varphi)\,\dot{\varphi}] + N\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + mgl\sin\varphi + 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

или

$$(K + N\cos^2\varphi)\,\ddot{\varphi} - N\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0.$$

Если угол φ мал, т. е. если можно пренебречь членами, содержащими φ и $\dot{\varphi}$ в степени выше первой, то

$$(K + N)\,\ddot{\varphi} + (4cl^2 + mgl)\,\varphi = 0.$$

т. е. система будет совершать гармонические колебания, период которых равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K+N}{4cl^2+mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(4m+9M)l}{12cl+3mg}}.$$

Пример 33. Составим уравнения движения материальной точки относительно Земли, происходящего под действием ньютоновской силы притяжения. Землю будем считать однородным шаром.

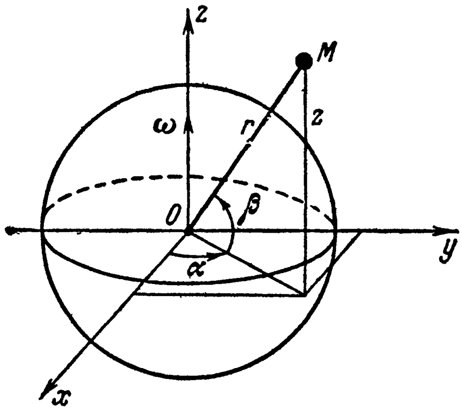

Рис. 4.3.

Введем в рассмотрение систему координат $Oxyz$, имеющую начало в центре Земли, причем ось z направим по оси вращения Земли. Считаем, что эта система не участвует во вращательном движении Земли. Движение по отношению к этой системе координат будем называть абсолютным.

За обобщенные координаты примем $q_1 = r$, $q_2 = \alpha$, $q_3 = \beta$, где r — расстояние точки M от центра Земли, α — долгота в абсолютном движении, β — геоцентрическая широта (рис. 4.3). Декартовы координаты материальной точки связаны со сферическими при помощи формул

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta\sin\alpha, \quad z = r\sin\beta.$$

Кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\beta}^2+r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta) \quad (m \text{ — масса точки}).$$

Потенциальная энергия равна *)

$$\Pi = -\frac{m\mu^2}{r}, \quad \text{где} \quad \mu^2 = gR^2.$$

Таким образом, функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\beta}^2+r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta) + \frac{m\mu^2}{r}.$$

Вычислим производные от L:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\beta}^2 + mr\dot{\alpha}^2\cos^2\beta - \frac{m\mu^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = mr^2\dot{\alpha}\cos^2\beta, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = mr^2\dot{\beta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = -mr^2\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta,$$

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. I, «Наука», 1970.

и составим уравнения (4.4):

$$\ddot{r} - r(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) = -\frac{\mu^2}{r^2}, \tag{4.5}$$

$$mr^2 \dot{\alpha} \cos^2 \beta = c_1, \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\beta}) + \frac{1}{2} r^2 \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta = 0 \tag{4.7}$$

(c_1 — постоянная интегрирования).

Так как движение происходит под действием центральной силы, то момент количества движения точки является постоянной величиной. Найдем проекции момента количества движения на оси x, y, z:

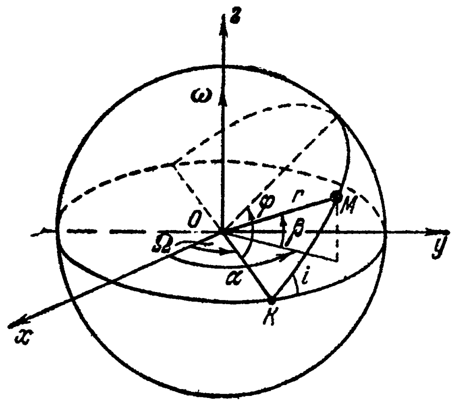

Рис. 4.4.

$$K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) =$$
$$= mr^2(\dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta \cos \beta),$$
$$K_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) =$$
$$= -mr^2(\dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \cos \beta),$$
$$K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2 \dot{\alpha} \cos^2 \beta.$$

Отсюда видно, что уравнение (4.6) выражает постоянство момента количества движения точки относительно оси Oz. Модуль момента количества движения равен

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = mr^2 \sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta} = c_2 = \text{const}. \tag{4.8}$$

Как известно *), движение точки под действием центральной силы происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения. Это движение происходит в плоскости, проходящей через центр шара. Линию OK пересечения этой плоскости с экваториальной плоскостью называют линией узлов (рис. 4.4). Обозначим через Ω угол между линией узлов и осью x, через i — угол между экваториальной плоскостью и плоскостью движения точки. В плоскости движения положение точки определяется радиусом r и углом φ. В полярных координатах r и φ момент количества движения точки выражается формулой

$$K = mr^2\dot{\varphi} = c_2. \tag{4.9}$$

Следовательно, в соответствии с формулой (4.8)

$$\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta = \dot{\varphi}^2. \tag{4.10}$$

Уравнение (4.5) движения точки при этом будет

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{4.11}$$

---

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1970.

С помощью замены

$$u=\frac{1}{r} \tag{4.12}$$

и соотношения

$$r^2\dot{\varphi}=c \tag{4.13}$$

(интеграл площадей) это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{1}{p}, \tag{4.14}$$

где

$$p=\frac{c^2}{\mu^2} \qquad \left(c=\frac{c_2}{m}\right). \tag{4.15}$$

Решая это уравнение, получим

$$u=a\cos(\varphi+\varepsilon)+\frac{1}{p}, \tag{4.16}$$

где a и ε — постоянные интегрирования. Так как $u=\frac{1}{r}$, то

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi+\varepsilon)}, \tag{4.17}$$

где

$$e=ap. \tag{4.18}$$

Полученная зависимость представляет собой уравнение конического сечения *).

§ 4.2. Обобщенный интеграл энергии

Предположим, что функция Лагранжа (кинетический потенциал) голономной системы является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, т. е.

$$L=L(q_m,\ \dot{q}_m,\ t) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{4.19}$$

Дифференцируя по времени функцию (4.19), будем иметь

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m\right)+\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.20}$$

*) Дальнейшее решение этой задачи, т. е. нахождение зависимости между величинами α, β, Ω, i, φ, читатель найдет в книге: Л. Н. Лахтин, Свободное движение в поле земного сфероида, Физматгиз, 1963.

Из уравнений (4.4) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\ddot{q}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m\right)$$
$$(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Значит, выражение (4.20) можно переписать в виде

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{4.21}$$

Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, т. е. если функция Лагранжа явно от времени не зависит, то

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m - L\right) = 0$$

и

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m - L = h. \tag{4.22}$$

Это выражение называется *обобщенным интегралом энергии* (*интегралом Якоби*). Вспоминая, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m$, можем записать

$$\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m - L = \sum_{m=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\dot{q}_m - T + \Pi. \tag{4.23}$$

Для реономной системы кинетическая энергия выражается формулой (3.43), т. е.

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Подставляя это в формулу (4.23), получим

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - T_2 - T_1 - T_0 + \Pi.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T_2, \quad \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = T_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m - L = T_2 - T_0 + \Pi. \tag{4.24}$$

Заметим, что это выражение не совпадает с полной энергией системы

$$E = T + \Pi = T_2 + T_1 + T_0 + \Pi.$$

Используя формулу (4.24), перепишем обобщенный интеграл энергии (4.22) в виде

$$T_2 - T_0 + \Pi = h. \tag{4.25}$$

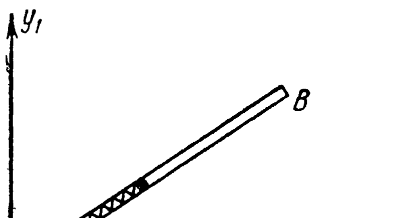

Рис. 4.5.

Итак, обобщенный интеграл энергии существует, если силы потенциальны, а функция Лагранжа явно от времени t не зависит.

Для склерономных консервативных систем, когда L явно не зависит от времени, $T = T_2$ и обобщенный интеграл будет обычным интегралом энергии:

$$T + \Pi = T_2 + \Pi = h. \tag{4.26}$$

Пример 34. Шарик массы m находится внутри прямолинейной горизонтальной трубки AB (рис. 4,5), которая равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A. Шарик соединен с неподвижной точкой A пружиной жесткости c. Пренебрегая трением, составить обобщенный интеграл энергии.

Примем за обобщенную координату расстояние x шарика от точки A, т. е. $q = x$. Так как $x_1 = x \cos \omega t$, $y_1 = x \sin \omega t$, то ско-

рость шарика равна

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{x}^2 + x^2\omega^2.$$

Следовательно, если пренебречь массой пружины, кинетическая энергия шарика будет равна

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{x}^2\omega^2).$$

Если x_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии, то потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{c}{2} (x - x_0)^2$$

(x_0 — длина пружины в ненапряженном состоянии).

Составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + x^2\omega^2) - \frac{c}{2} (x - x_0)^2,$$

найдем $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, и обобщенный интеграл энергии будет равен

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m x^2\omega^2 + \frac{c}{2} (x - x_0)^2 = h.$$

Напишем теперь уравнение движения. Учитывая, что

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x - c (x - x_0),$$

получим уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - m\omega^2 x + c (x - x_0) = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} - m\omega^2 x + c (x - x_0) = 0.$$

После его интегрирования получим

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{c}{2} (x - x_0)^2 = h,$$

т. е. вычисленный выше обобщенный интеграл энергии.

§ 4.3. Метод Уиттекера

Метод Уиттекера позволяет с помощью обобщенного интеграла энергии понизить порядок системы (4.4) на две единицы. Пусть рассматриваемая голономная система будет консервативной. Это значит, что функция Лагранжа не зависит явно от времени, т. е.

$$L = L (q_m, \dot{q}_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{4.27}$$

Идея метода Уиттекера заключается в использовании интеграла энергии для замены аргумента t в уравнениях Лагранжа (4.4) новым аргументом — какой-либо обобщенной координатой, например q_1. Пусть q_1 будет новым аргументом, тогда

$$\dot{q}_p = \frac{dq_p}{dt} = \frac{dq_p}{dq_1}\frac{dq_1}{dt} = q_p' \cdot \dot{q}_1 \qquad (p = 1, 2, \ldots, s), \tag{4.28}$$

где

$$q_p' = \frac{dq_p}{dq_1} = \frac{\dot{q}_p}{\dot{q}_1}. \tag{4.29}$$

Заменяя в функции Лагранжа (4.27) $\dot{q}_p$ на q_p', получим

$$L(q_m, \dot{q}_m) = L\left(q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_p \equiv \dot{q}_1, q_p'\right).$$

Введем обозначение

$$L\left(q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_p \equiv \dot{q}_1, q_p'\right) = \Omega\left(q_m, \dot{q}_1, q_p'\right) \qquad (p = 2, 3, \ldots, s). \tag{4.30}$$

В соответствии с выражениями (4.30) и (4.29) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{p=2}^{s} \frac{\partial \Omega}{\partial q_p'} \cdot \frac{\partial q_p'}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{p=2}^{s} \frac{\partial \Omega}{\partial q_p'} \frac{\dot{q}_p}{\dot{q}_1^2}, \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_p'} \frac{\partial q_p'}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_p'} \qquad (p = 2, 3, \ldots, s), \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_m}. \tag{4.33}$$

Из выражения (4.31) следует, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{p=2}^{s} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_p'} \cdot \frac{\dot{q}_p}{\dot{q}_1^2}.$$

Принимая во внимание соотношение (4.32), получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{p=2}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \frac{\dot{q}_p}{\dot{q}_1} = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\dot{q}_m}{\dot{q}_1},$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}. \tag{4.34}$$

Следовательно, обобщенный интеграл энергии (4.22) можно записать в виде

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - L = h$$

или, в силу (4.30),

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} - \Omega = h. \tag{4.35}$$

Решая соотношение (4.35), найдем $\dot{q}_1$ как функцию q_m, q'_p ($m = 1, 2, \ldots, s$; $p = 2, 3, \ldots, s$). Подставив затем найденное выражение для $\dot{q}_1$ в производную $\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}$, получим функцию

$$L'\left(q_m, q'_p\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}, \tag{4.36}$$

которую будем называть *функцией Уиттекера*. Найдя $\dot{q}_1$ из соотношения (4.35) и подставив это $\dot{q}_1$ в то же соотношение, получим тождество. После дифференцирования этого тождества по q'_p и q_m будем иметь соответственно

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_p} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q'_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_p} \right] - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial q'_p} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_p} \right] = 0 \tag{4.37}$$

и

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q_m} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_p} \right] - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial q_m} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_m} \right] = 0. \tag{4.38}$$

Из выражения (4.37) следует:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q'_p} = \dot{q}_1 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q'_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}'_p} \right].$$

Из соотношения (4.36) получим

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_p} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q'_p} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_p}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q'_p} = \dot{q}_1 \frac{\partial L'}{\partial q'_p} \qquad (p = 2, 3, \ldots, s). \tag{4.39}$$

В соответствии с (4.38) имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_m} = \dot{q}_1 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q_m} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m} \right];$$

так как

$$\frac{\partial L'}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \, \partial q_m} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_m},$$

то

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_m} = \dot{q}_1 \frac{\partial L'}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{4.40}$$

Сравнивая теперь соотношения (4.32) и (4.33) с соотношениями (4.39) и (4.40), получим

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \qquad (p = 2, 3, \ldots, s), \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_m} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial L}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{4.42}$$

Используя соотношения (4.40) и (4.41), перепишем уравнения (4.4) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_p}\right) - \dot{q}_1 \frac{\partial L'}{\partial q_p} = 0.$$

Так как $\dot{q}_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$, то

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_p}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_p} = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots, s). \tag{4.43}$$

Уравнения (4.43) называются *уравнениями Уиттекера.*

На основании соотношения (4.34) функцию Уиттекера (4.36) можно определить по формуле

$$L' = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{\dot{q}_m}{\dot{q}_1}, \tag{4.44}$$

где в правой части $\dot{q}_1$ выражено с помощью формулы (4.35) через q_m и q'_p.

Таким образом, метод Уиттекера дает возможность использовать обобщенный интеграл энергии для исключения времени t из системы уравнений Лагранжа и приведения ее к новой системе $s-1$ уравнений Уиттекера (4.43), имеющих вид уравнений Лагранжа, в которых роль аргумента играет переменная q_1 (вместо времени t) и в которые вместо производных $\dot{q}_p$ по аргументу t входят производные q'_p по аргументу q_1. Для построения уравнений Уиттекера (4.43) следует предварительно построить функцию Уиттекера L'. Для этого составляется выражение (4.44), в которое вместо $\dot{q}_1$ подставляется его выражение, полученное из обобщенного интеграла энергии (4.35).

Заметим, что описанная операция выполнима только при условии, что число степеней свободы материальной системы больше одной, так как иначе задача решается самим обобщенным интегралом энергии. Следует также иметь в виду, что если координата q_1 не будет входить явно в выражение функции L', то метод Уиттекера можно было бы применить вторично, взяв в качестве но-

вого аргумента обобщенную координату q_2 вместо прежнего аргумента q_1.

Пример 35. Движение материальной точки под действием центральной силы.

За обобщенные координаты примем полярные координаты $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$. Так как в этом случае

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

В случае центральных сил потенциальная энергия является функцией r, т. е. $\Pi = \Pi(r)$, и функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \Pi(r).$$

За новый аргумент примем координату φ, тогда

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = r'\cdot\dot{\varphi}.$$

В соответствии с обозначением (4.30) имеем

$$\Omega = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r'^2 + r^2\right) - \Pi(r).$$

Следовательно, выражение (4.35) в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r'^2 + r^2\right) + \Pi(r) = h\ ^{*}).$$

Отсюда получим

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2[h - \Pi(r)]}{m\left(r'^2 + r^2\right)}}.$$

Найдем теперь функцию Уиттекера. Согласно формуле (4.44) и соотношению $\dot{r} = \dot{\varphi}r'$

$$L' = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}\left(r^2 + r'^2\right).$$

Подставляя в это выражение полученное выше $\dot{\varphi}$, найдем функцию Уиттекера

$$L' = \sqrt{2m[h - \Pi(r)]\left(r^2 + r'^2\right)}.$$

---

*) Полученное выражение есть интеграл энергии, т. е. $T + \Pi = h$.

Составим теперь уравнение Уиттекера

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial L'}{\partial r'}\right)-\frac{\partial L'}{\partial r}=0.$$

Так как

$$\frac{\partial L'}{\partial r'}=\sqrt{2m}\,\frac{r'\sqrt{h-\Pi}}{\sqrt{r^2+r'^2}},$$

$$\frac{\partial L'}{\partial r}=\sqrt{2m}\,\frac{-\frac{\partial \Pi}{\partial r}\left(r^2+r'^2\right)+(h-\Pi)\,2r}{2\sqrt{(h-\Pi)\left(r^2+r'^2\right)}},$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial L'}{\partial r'}\right)=\sqrt{2m}\,\frac{2(h-\Pi)\left(r^2r''-rr'^2\right)-\frac{\partial \Pi}{\partial r}r'^2\left(r^2+r'^2\right)}{2\left(r^2+r'^2\right)\sqrt{(h-\Pi)\left(r^2+r'^2\right)}},$$

то уравнением Уиттекера будет

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}r^2\left(r^2+r'^2\right)+2r(h-\Pi)\left(rr''-2r'^2-r^2\right)=0. \qquad (4.45)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением траектории точки при ее движении в центральном поле. Общее решение этого уравнения зависит от постоянной h и постоянных интегрирования c_1 и c_2, т. е.

$$r=r(\varphi,\ h,\ c_1,\ c_2).$$

При изучении движения точки под действием центральной силы часто пользуются заменой $r=\frac{1}{u}$. Тогда

$$r'=-\frac{u'}{u^2},\quad r''=\frac{-u''u+2u'^2}{u^3},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}=\frac{\partial \Pi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}=-u^2\frac{\partial \Pi}{\partial u}.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнения (4.45), получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u}\left(u^2+u'^2\right)+2(h-\Pi)\left(u''+u\right)=0.$$

Мы не будем заниматься интегрированием этого уравнения, а найдем уравнение траектории путем составления «нового» обобщенного интеграла энергии, используя то обстоятельство, что координата φ в функцию Уиттекера не входит. В соответствии с выражением (4.22) имеем

$$r'\frac{\partial L'}{\partial r'}-L'=h'.$$

Так как

$$\frac{\partial L'}{\partial r'} = \sqrt{2m}\,\frac{r'\sqrt{h-\Pi}}{\sqrt{r^2+r'^2}}, \qquad L' = \sqrt{2m\,(h-\Pi)\left(r^2+r'^2\right)},$$

то

$$\sqrt{2m}\,\frac{r'^2\sqrt{h-\Pi}}{\sqrt{r^2+r'^2}} - \sqrt{2m\,(h-\Pi)\left(r^2+r'^2\right)} = h',$$

или

$$-r^2\sqrt{2m\,(h-\Pi)} = h'\sqrt{r^2+r'^2}. \tag{4.46}$$

Выясним смысл нового обобщенного интеграла энергии. В силу того, что $h-\Pi = T$, а

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) = \frac{1}{2}m\dot\varphi^2\left(r'^2+r^2\right),$$

выражение (4.46) примет вид

$$-mr^2\dot\varphi = h',$$

т. е. выражение (4.46) представляет собой интеграл площадей. Вводя обозначение $c = -\frac{h'}{2}$ и возводя выражение (4.46) в квадрат, получим

$$2c^2\left(r^2+r'^2\right) = mr^4\,[h-\Pi(r)].$$

Если ввести замену $r = \frac{1}{u}$, то

$$2c^2\left(u'^2+u^2\right) = m\left[h-\Pi\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{*)}.$$

Дифференцируя это уравнение по φ, имеем

$$4c^2\,(u''+u) = -m\,\frac{d\Pi}{du}.$$

Это уравнение называется уравнением Бинэ.

Пусть действующая на точку сила будет ньютоновской силой притяжения, тогда

$$\Pi = -\frac{k^2}{r} = -k^2u \qquad (k^2 - \text{постоянная})$$

и, следовательно,

$$4c^2\,(u''+u) = mk^2.$$

---

*) Это уравнение первого порядка сводится к квадратурам.

Вводя обозначение $p=\frac{4c^2}{mk^2}$, получим

$$u''+u=\frac{1}{p}.$$

Решение этого уравнения рассмотрено в § 4.1.

§ 4.4. Циклические координаты. Уравнения Рауса

Те обобщенные координаты, которые не входят явно в функцию Лагранжа, называются *циклическими* координатами. Те же, которые входят в функцию Лагранжа, называются *позиционными* координатами.

Метод Рауса заключается в одновременном исключении циклических координат из уравнений Лагранжа второго рода, при этом число уравнений движения в независимых координатах понижается на число исключенных циклических координат. Предположим сначала, что все обобщенные координаты позиционные. Тогда функция Лагранжа будет функцией всех обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени t, т. е.

$$L=L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t); \tag{4.47}$$

в этом случае мы будем иметь s уравнений Лагранжа (4.4):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}=0 \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{4.48}$$

Для производных от L по первым $r\,(r\leqslant s)$ обобщенным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_r$ введем обозначение

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}=p_m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{4.49}$$

где p_m называются *обобщенными импульсами*. Тогда на основании уравнений (4.48) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_m}=\dot{p}_m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{4.50}$$

Найдем полный дифференциал от функции (4.47):

$$dL=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_m}dq_m+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}d\dot{q}_m+\frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Принимая во внимание формулы (4.49) и (4.50), получим

$$dL = \sum_{m=1}^{r} \dot{p}_m \, dq_m + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{r} p_m \, d\dot{q}_m + \\ + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{r} p_m \, d\dot{q}_m = d \sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - \sum_{m=1}^{r} \dot{q}_m \, dp_m,$$

то будет

$$d\left(\sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - L\right) = -\sum_{m=1}^{r} \dot{p}_m \, dq_m - \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m + \\ + \sum_{m=1}^{r} \dot{q}_m \, dp_m - \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (4.51)$$

Введенную Раусом функцию

$$R = \sum_{m=1}^{r} p_m \dot{q}_m - L \quad (4.52)$$

называют *функцией Рауса.*

Полный дифференциал от функции Рауса имеет вид

$$dR = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial q_m} dq_m + \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \\ + \sum_{m=r+1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m + \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial R}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial R}{\partial t} dt. \quad (4.53)$$

Сравнивая между собой выражения (4.51) и (4.53) с учетом обозначения (4.52), получим

$$\frac{\partial R}{\partial q_m} = -\dot{p}_m, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial p_m} = \dot{q}_m \quad (m = 1, 2, \ldots, r) \quad (4.54)$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial q_m} = -\frac{\partial L}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \quad (m = r+1, r+2, \ldots, s). \quad (4.55)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Из условия

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

вытекает, что функция Рауса от первых r обобщенных скоростей не зависит. Подставляя теперь результаты (4.54) и (4.55) в уравнения Лагранжа (4.48), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = r+1,\ \ldots,\ s) \qquad (4.56)$$

и

$$\dot{q}_m = \frac{\partial R}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial R}{\partial q_m}. \qquad (4.57)$$

Пусть теперь первые r обобщенных координат (q_1, q_2, ..., q_r) будут циклическими, тогда

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

следовательно, в соответствии с (4.50) $\dot{p}_m = 0$ ($m = 1$, 2, ..., r) и

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

будут постоянными величинами. Из уравнений (4.57) в связи с этим получим

$$\dot{q}_m = \frac{\partial R}{\partial p_m}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_m} = 0. \qquad (4.58)$$

Это значит, что циклические координаты не входят в состав функции Рауса. Уравнения же (4.56), которые называются *уравнениями Рауса*, своего вида не изменят. Итак, нами установлено, что *функция Рауса не содержит циклических координат и их производных по времени.*

Для отыскания позиционных координат служат $s-r$ уравнений Рауса (4.56). Циклические же координаты, в соответствии с (4.58), определяются по формулам

$$q_m = \int \frac{\partial R}{\partial p_m}\,dt \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \qquad (4.59)$$

Пример 36. Рассмотрим движение материальной точки, притягиваемой к неподвижному центру по закону всемирного тяготения.

Воспользуемся полярными координатами. Пусть $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$. Так как

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \quad \text{и} \quad \Pi = -\frac{k^2}{r}$$

(k^2 — постоянная величина), то

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k^2}{r}.$$

Координата φ является циклической. Значит,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p = \text{const}.$$

Это выражение является интегралом **площадей**.

Составим функцию Рауса:

$$R = p\dot{\varphi} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k^2}{r}.$$

Поскольку

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2},$$

то

$$R = \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{k^2}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r}, \qquad \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2}.$$

Составим уравнение Рауса:

$$\frac{d}{dt}(-m\dot{r}) + \frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2} = 0,$$

или

$$m\ddot{r} - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0. \tag{4.60}$$

Это уравнение служит для определения r как функции времени *). Так как

$$\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{p}{mr^2},$$

---

*) Введя замену $r = \frac{1}{u}$ и учитывая, что $\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2}$, уравнение (4.60) можно привести к дифференциальному уравнению траектории

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = c \qquad (c = \text{const}).$$

то

$$\varphi = \int \frac{p}{mr^2}\, dt, \tag{4.61}$$

куда вместо r нужно вставить решение уравнения (4.60). Используя то, что $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$, перепишем уравнение (4.60) в виде

$$m\dot{r}\, d\dot{r} = \left(\frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2}\right) dr$$

или, после интегрирования,

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 = -\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} + h. \tag{4.62}$$

Это выражение представляет собой интеграл энергии *).

Рассмотрим движения, не уходящие в бесконечность. Для таких движений, в соответствии с формулой (4.62), $h < 0$. Введем обозначение

$$h = -\beta^2.$$

Из выражения (4.62) теперь следует, что

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} - \beta^2\right)}$$

и

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\, dt = \frac{dr}{\sqrt{-\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} - \beta^2}}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \frac{1}{\beta}\int \frac{r\, dr}{\sqrt{\frac{k^2}{\beta^2} r - \frac{p^2}{2m\beta^2} - r^2}}.$$

Введя обозначения

$$\mu = \frac{\beta}{a}\sqrt{\frac{2}{m}}, \quad a = \frac{k^2}{2\beta^2}, \quad b = -\frac{p^2}{2m\beta^2} + \frac{k^4}{4\beta^4},$$

---

*) Так как система консервативная, то $T + \Pi = h$, т. е.

$$\frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k^2}{r} = h.$$

Введя замену $\dot{\varphi} = \frac{p}{mr^2}$, получим

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{k^2}{r} = h.$$

получим

$$\mu(t-t_0)=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{b-(a-r)^2}}.$$

Заменяя

$$a-r=\sqrt{b}\cos E,$$

будем иметь

$$\mu(t-t_0)=\int(1-e\cos E)\,dE,$$

где $e=\frac{\sqrt{b}}{a}$. Пусть $E=E_0$ при $t-t_0$, тогда

$$\mu(t-t_0)=E-E_0-e(\sin E-\sin E_0), \tag{4.63}$$

где $E=\arccos\frac{a-r}{ae}$.

Уравнение (4.63) называется *уравнением Кеплера*.

§ 4.5. Обобщенный потенциал *)

До сих пор мы рассматривали только такие силы, для которых потенциальная энергия была функцией обобщенных координат и времени (§ 4.1), т. е.

$$\Pi=\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s, t). \tag{4.64}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V=V(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s, t) \tag{4.65}$$

и потребуем, чтобы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m \qquad (m=1, 2, \ldots, s)$$

имели вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}=0 \qquad (m=1, 2, \ldots, s), \tag{4.66}$$

где

$$L=T-V. \tag{4.67}$$

Очевидно, что если функция V такова, что

$$Q_m=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_m} \qquad (m=1, 2, \ldots, s), \tag{4.68}$$

*) Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.

то уравнения Лагранжа будут иметь вид уравнений (4.66). Функция (4.65), с помощью которой можно получить обобщенные силы по формуле (4.68), называется *обобщенным потенциалом.*

Выясним структуру зависимости функции V от обобщенных скоростей. На основании формулы (4.68) имеем

$$Q_m = \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_m \, \partial \dot{q}_\mu} \ddot{q}_\mu + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_m \, \partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_m \, \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_m}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Так как обобщенные силы явно от обобщенных ускорений не зависят, то

$$\sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_m \, \partial \dot{q}_\mu} \ddot{q}_\mu = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

т. е. обобщенный потенциал V может быть только линейной функцией от обобщенных скоростей:

$$V = \Pi(q_m, t) + \sum_{\mu=1}^{s} \Pi_\mu(q_m, t)\, \dot{q}_\mu \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (4.69)$$

Используя формулу (4.69), определим вид обобщенных сил с помощью соотношения (4.68):

$$Q_m = \frac{d\Pi_m}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_m}\left[\sum_{\mu=1}^{s} \Pi_\mu \dot{q}_\mu + \Pi\right] =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \Pi_m}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_m} \dot{q}_\mu - \frac{\partial \Pi}{\partial q_m} =$$
$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{\partial \Pi_m}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_m}\right) \dot{q}_\mu + \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Введем обозначения

$$\gamma_{m\mu} = \frac{\partial \Pi_m}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q_m} \qquad (m, \mu = 1, 2, \ldots, s). \quad (4.70)$$

Очевидно, что

$$\gamma_{m\mu} = -\gamma_{\mu m}.$$

Следовательно,

$$Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{m\mu}\dot{q}_\mu + \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (4.71)$$

Если функции Π_m не зависят от времени, то $\frac{\partial \Pi_m}{\partial t} = 0$ и

$$Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} + \sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{m\mu}\dot{q}_\mu \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (4.72)$$

Таким образом, если функции Π_m не зависят явно от времени, то обобщенные силы складываются из потенциальных сил $\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}\right)$ и гироскопических сил $\left(\sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{m\mu}\dot{q}_\mu\right)$.

Пример 37. Примером силы, имеющей обобщенный потенциал, является сила Лоренца, действующая на точечный заряд в электромагнитном поле *):

$$\boldsymbol{F} = e\left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right], \quad (4.73)$$

где e — заряд, $\boldsymbol{v}$ — скорость точки, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей соответственно, c — скорость света. Если координаты заряда x, y и z, то проекциями силы $\boldsymbol{F}$ на оси x, y и z будут

$$F_x = eE_x + \frac{1}{c}(\dot{y}H_z - \dot{z}H_y),$$

$$F_y = eE_y + \frac{1}{c}(\dot{z}H_x - \dot{x}H_z),$$

$$F_z = eE_z + \frac{1}{c}(\dot{x}H_y - \dot{y}H_x).$$

Так как

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A},$$

где φ — скалярный потенциал, $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал, то в силу того, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

*) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1962.

имеем

$$F_x=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{1}{c}\left[\dot y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\dot z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot y+\frac{\partial A_z}{\partial z}\dot z\right)+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot y+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot z\right)=$$

$$=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot z\right)+$$

$$+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot y+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot z\right). \quad (4.74)$$

Введем функцию

$$V=e\varphi\cdot\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}=e\varphi-\frac{e}{c}(\dot xA_x+\dot yA_y+\dot zA_z) \quad (4.75)$$

и составим выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot x}\right)-\frac{\partial V}{\partial x}=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot z\right)+$$

$$+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot x+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot z\right). \quad (4.76)$$

Сравнивая между собой равенства (4.74) и (4.76), получаем

$$F_x=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot x}\right)-\frac{\partial V}{\partial x};$$

аналогично можно доказать, что

$$F_y=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot y}\right)-\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$F_z=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot z}\right)-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Следовательно, обобщенный потенциал для силы Лоренца определяется формулой (4.75).

ГЛАВА 5

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

§ 5.1. Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона

Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_s$ для голономной системы в случае потенциального силового поля имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}=0 \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{5.1}$$

где $L=T-\Pi$, представляют собой систему s обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Вводя s новых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_s$ как функции $t, q_1, q_2, \ldots, q_s$ и $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$, т. е.

$$z_m=z_m(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_s) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{5.2}$$

и предполагая, что эти зависимости могут быть разрешены относительно $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$, мы можем привести систему уравнений (5.1) к системе $2s$ уравнений первого порядка.

Особый интерес представляют предложенные Гамильтоном переменные

$$p_m=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}=p_m(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_s) \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{5.3}$$

так как они дают возможность получить систему уравнений движения в симметричной форме, обладающую рядом свойств, позволяющих плодотворно применять эти уравнения к решению задач на определение движения

материальной системы. В дальнейшем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s$ будем называть *переменными Гамильтона* в отличие от переменных Лагранжа $q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Система (5.3) может быть разрешена относительно $\dot{q}_m$. В самом деле, как было установлено в § 3.6, кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{5.4}$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{p=1}^{s} A_{mp} \dot{q}_m \dot{q}_p,$$

$$T_1 = \sum_{m=1}^{s} B_m \dot{q}_m, \quad T_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2.$$

В соответствии с выражением (5.3) имеем

$$p_m = \sum_{p=1}^{s} A_{mp} \dot{q}_p + B_m. \tag{5.5}$$

Так как определитель этой системы *)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} \end{vmatrix} = | A_{mp} | = \left| \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}_p} \right| = \left| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_p \, \partial \dot{q}_m} \right| \neq 0,$$

то она разрешима относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Гамильтон ввел в рассмотрение функцию

$$H = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - L, \tag{5.6}$$

которая называется *функцией Гамильтона*. Сумму $\sum\limits_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m$ на основании (5.3) и (5.4) можно записать

*) Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книгах: Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960; А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T_2, \quad \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = T_1,$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m = 2T_2 + T_1.$$

Таким образом,

$$H = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - \Pi) = T_2 - T_0 + \Pi. \quad (5.7)$$

Если рассматриваемая материальная система стационарная, то $T = T_2$ и

$$H = T_2 + \Pi = T + \Pi, \quad (5.8)$$

т. е. функция Гамильтона равна полной механической энергии системы.

Переменные Гамильтона p_m называются *обобщенными импульсами* *).

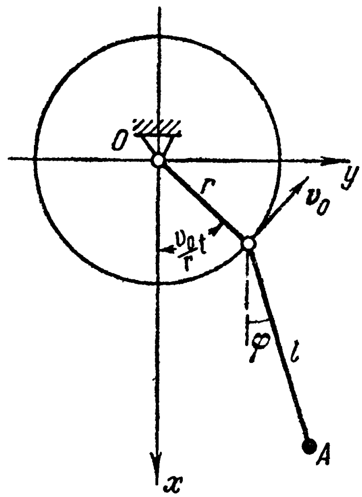

Рис. 5.1.

Пример 38. Найти функцию Гамильтона для математического маятника длины l, точка подвеса которого совершает движение по вертикальной окружности радиуса r с постоянной скоростью v_0 (рис. 5.1).

За обобщенную координату примем $q = \varphi$. Так как

$$x_A = r \cos\frac{v_0}{r} t + l \cos \varphi, \quad y_A = r \sin\frac{v_0}{r} t + l \sin \varphi,$$

*) Для свободной материальной точки

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

и

$$p_1 = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{y}, \quad p_3 = m\dot{z}$$

представляют собой проекции количества движения точки на оси координат.

то

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2\right)=\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2+2v_0l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}t\right)+v_0^2\right].$$

При нахождении обобщенных сил связи считаются мгновенно остановленными (§ 3.3), поэтому за потенциальную энергию мы можем принять *)

$$\Pi=-mgl\cos\varphi.$$

Функцией Лагранжа будет

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2+2v_0l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}t\right)+v_0^2\right]+mgl\cos\varphi,$$

и, следовательно,

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}+mv_0l\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}t\right),$$

откуда

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}t\right). \tag{5.9}$$

Составим функцию Гамильтона

$$H=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-v_0^2-mgl\cos\varphi. \tag{5.10}$$

Если $v_0=0$, то

$$H=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi=T+\Pi=h,$$

т. е. H является интегралом энергии, так как в этом случае связи будут стационарными и L не зависит от t явно. Подставляя выражение (5.9) в функцию (5.10), получим

$$H=\frac{1}{2}ml^2\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}t\right)\right]^2-v_0^2-mgl\cos\varphi. \tag{5.11}$$

§ 5.2. Канонические уравнения Гамильтона

Функция

$$H=\sum_{m=1}^{s}p_m\dot{q}_m-L$$

---

*) Поскольку в уравнения Лагранжа входит $\partial\Pi/\partial q_m$, то Π, взятое в виде $\Pi=-mg\left(l\cos\varphi+2\cos\frac{v_0}{2}t\right)$, ничего в выкладках не изменит.

является функцией $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_s$, пока в ней не произведена замена всех $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$ $\ldots, \dot{q}_s$ через $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Следовательно,

$$\delta H = \sum_{m=1}^{s} (\delta p_m \dot{q}_m + p_m \delta \dot{q}_m) - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m.$$

Так как в силу (5.3)

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \delta \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m.$$

то

$$\delta H = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m. \qquad (5.12)$$

Определив из выражений (5.3) обобщение скорости $\dot{q}_m$ через p_m и подставив их затем в функцию (5.6), получим, что H будет уже функцией только $t, q_1, q_2, \ldots, q_s$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$, т. е.

$$H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s). \qquad (5.13)$$

Тогда можно записать, что

$$\delta H = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_m} \delta p_m. \qquad (5.14)$$

Сравнивая выражения (5.12) и (5.14), имеем

$$\sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_m} \delta p_m,$$

или

$$\sum_{m=1}^{s} \left(\dot{q}_m - \frac{\partial H}{\partial p_m}\right) \delta p_m - \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} + \frac{\partial H}{\partial q_m}\right) \delta q_m = 0.$$

В силу независимости вариаций δq_m и δp_m получим

$$\dot{q}_m - \frac{\partial H}{\partial p_m} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_m} + \frac{\partial H}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Поскольку $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$, то из уравнений (5.1) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_m} = \frac{dp_m}{dt} = \dot{p}_m.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (5.15)$$

Полученная система $2s$ уравнений первого порядка называется *системой канонических уравнений Гамильтона.*

Если действующие на материальную систему силы не консервативны, то уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Так как

$$p_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}, \text{ то } \dot{p}_m = \frac{\partial T}{\partial q_m} + Q_m \quad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Составив функцию

$$K = \sum_{m=1}^{s} \dot{p}_m \dot{q}_m - T$$

и произведя выкладки, аналогичные проведенным при выводе уравнений (5.15), получим канонические уравнения в виде

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial K}{\partial q_m} + Q_m, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial K}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (5.16)$$

Если силы консервативны, то $Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}$ и

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial (K + \Pi)}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial (K + \Pi)}{\partial p_m},$$

ибо

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_m} \equiv 0.$$

Однако так как

$$K + \Pi = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - T + \Pi = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - L = H,$$

то

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Дифференцируя функцию (5.13) по времени t, получим

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_m}\dot{q}_m+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_m}\dot{p}_m.$$

Учитывая, что

$$\dot{q}_m=\frac{\partial H}{\partial p_m},\qquad \dot{p}_m=-\frac{\partial H}{\partial q_m}\qquad (m=1,\,2,\,\ldots,\,s),$$

найдем

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}-\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если

$$\frac{dH}{dt}\equiv 0,\ \text{то}\ \frac{\partial H}{\partial t}=0$$

и

$$H=\text{const}.$$

Для стационарных связей $T=T_2$, следовательно,

$$H=T+\Pi=h, \tag{5.17}$$

т. е. функция Гамильтона для стационарных связей и консервативных сил является постоянной величиной, равной полной механической энергии системы.

Пример 39. Составить канонические уравнения Гамильтона для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе.

Так как функция Гамильтона имеет вид (5.11), то

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=mlv_0\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right)\right]\sin\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right)-mgl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right)$$

и, следовательно,

$$\dot{p}=-mlv_0\left[\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right)\right]\sin\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right)-mgl\sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p}{ml^2}-\frac{v_0}{l}\cos\left(\varphi-\frac{v_0}{r}\,t\right).$$

Пример 40. Точка M массы m притягивается к двум неподвижным центрам M_1 и M_2 силами, пропорциональными расстоянию

точки от этих центров (рис. 5.2). Найти траекторию точки для начальных условий: при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, $y = b > a$, $\dot{y} = 0$, $z = h$, $\dot{z} = 0$. Расстояние между центрами $M_1M_2 = 2a$.

Начало координат поместим в середине отрезка M_1M_2, ось y направим по направлению отрезка M_1M_2 от M_1 к M_2. За обобщенные

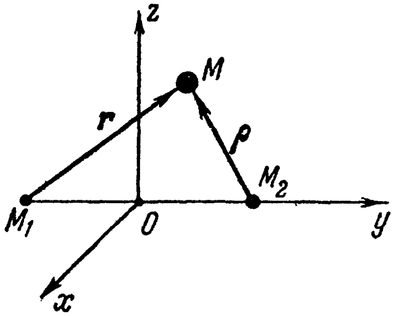

Рис. 5.2.

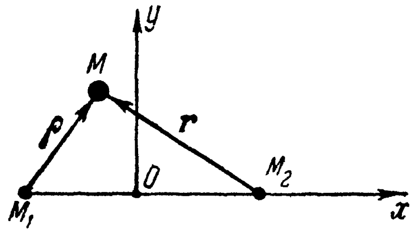

Рис. 5.3.

координаты примем декартовы координаты точки, т. е. $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Выражения для кинетической и потенциальной энергии соответственно имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad \Pi = \frac{c_1}{2} r^2 + \frac{c_2}{2} \rho^2,$$

где c_1 и c_2 —коэффициенты пропорциональности,

$$r^2 = x^2 + (y + a)^2 + z^2, \qquad \rho^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2.$$

Так как $p_1 = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$, то

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{c_1}{2}\left[x^2 + (y + a)^2 + z^2\right] + \frac{c_2}{2}\left[x^2 + (y - a)^2 + z^2\right].$$

Следовательно,

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -c_1 x - c_2 x,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -c_1 (y + a) - c_2 (y - a),$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = -c_1 z - c_2 z,$$

$$\dot{x} = \frac{p_1}{m}, \qquad \dot{y} = \frac{p_2}{m}, \qquad \dot{z} = \frac{p_3}{m}.$$

Отсюда имеем

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + k^2 y = N, \qquad \ddot{z} + k^2 z = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}, \qquad N = \frac{(c_2 - c_1)\,a}{m}.$$

Общими решениями этих уравнений будут

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt,$$
$$y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \frac{N}{k^2},$$
$$z = A_3 \cos kt + B_3 \sin kt.$$

Используя начальные условия, получим

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{v_0}{k}, \quad A_2 = b - \frac{N}{k^2}, \quad B_2 = 0, \quad A_3 = h, \quad B_3 = 0$$

и, следовательно,

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt, \qquad y = \left(b - \frac{N}{k^2}\right) \cos kt + \frac{N}{k^2}, \qquad z = h \cos kt.$$

Если $h = 0$, то $z = 0$ и движение будет происходить в плоскости xy. Траекторией движения будет кривая второго порядка — эллипс

$$\frac{x^2k^2}{v_0^2} + \frac{\left(y - \frac{N}{k^2}\right)^2}{\left(b - \frac{N}{k^2}\right)^2} = 1.$$

Пример 41. Составить канонические уравнения Гамильтона для плоского движения материальной точки M массы m, притягиваемой к двум неподвижным центрам силами, обратно пропорциональными расстояниям от точки до притягивающих центров M_1 и M_2 *).

Начало координат возьмем в середине отрезка M_1M_2 и направим ось x по отрезку M_1M_2 от M_1 к M_2 (рис. 5.3). Длина отрезка $M_1M_2 = 2a$. Выражения для кинетической и потенциальной энергии соответственно имеют вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \Pi = -\frac{c_1 m}{\rho} - \frac{c_2 m}{r},$$

где c_1 и c_2 — коэффициенты пропорциональности,

$$\rho = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}, \qquad r = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

За обобщенные координаты примем

$$\lambda = \frac{1}{2a} (r + \rho), \qquad \mu = \frac{1}{2a} (r - \rho).$$

Так как $r + \rho \geqslant 2a$ и $|r - \rho| \leqslant 2a$, то координаты λ и μ, которые называются *эллиптическими координатами*, могут принимать только те значения, которые удовлетворяют неравенствам

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \infty, \quad -1 < \mu < 1.$$

Из выражений для ρ, r, λ и μ следует, что

$$x = -a\lambda\mu, \qquad y = a\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

---

*) Г. Н. Дубошин, Небесная механика, «Наука», 1964.

Находя теперь

$$\dot{x} = -a(\dot{\lambda}\mu + \dot{\mu}\lambda),$$

$$\dot{y} = a\left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}} - \mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\right),$$

получим выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left[(\dot{\lambda}\mu + \dot{\mu}\lambda)^2 + \left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}} - \mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}ma^2(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2-1} + \frac{\dot{\mu}^2}{1-\mu^2}\right),$$

$$\Pi = -\frac{c_1 m}{a(\lambda-\mu)} - \frac{c_2 m}{a(\lambda+\mu)} = -\frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)}\left[(c_1+c_2)\lambda + (c_1-c_2)\mu\right].$$

Вычислив

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}} = ma^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2-1},$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial\dot{\mu}} = ma^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{\dot{\mu}}{\mu^2-1}$$

и подставив полученные значения в выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{1}{2m(\lambda^2-\mu^2)a^2}\left[p_1^2(\lambda^2-1) + p_2^2(1+\mu^2)\right].$$

Следовательно,

$$H = \frac{1}{2m(\lambda^2-\mu^2)a^2}\left[p_1^2(\lambda^2-1) + p_2^2(1-\mu^2)\right] -$$

$$- \frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)}\left[(c_1+c_2)\lambda + (c_1-c_2)\mu\right].$$

Каноническими уравнения будут

$$\dot{p}_1 = -\frac{\lambda(1-\mu^2)(p_1^2+p_2^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)^2} - \frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)^2}\left[c_1(\lambda+\mu)^2 + c_2(\lambda-\mu)^2\right],$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\mu(\lambda^2-1)(p_2^2-p_1^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)^2} + \frac{m}{a(\lambda^2-\mu^2)^2}\left[c_1(\lambda+\mu)^2 - c_2(\lambda-\mu)^2\right],$$

$$\dot{\lambda} = \frac{p_1(\lambda^2-1)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)}, \quad \dot{\mu} = \frac{p_2(1-\mu^2)}{ma^2(\lambda^2-\mu^2)}.$$

§ 5.3. Канонические уравнения при наличии циклических координат

В общем случае функция Гамильтона H является функцией времени, s обобщенных координат и s обобщенных импульсов, т. е.

$$H = H(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

Циклическими координатами мы ранее назвали обобщенные координаты, не входящие в явном виде в функцию Лагранжа. В § 5.2 было установлено, что

$$-\frac{\partial L}{\partial q_m}=\frac{\partial H}{\partial q_m} \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

т. е., если частная производная от L по q_m равна нулю, то будет равна нулю и частная производная от H по q_m. Следовательно, циклические координаты не входят и в функцию Гамильтона.

Предположим, что первые k обобщенных координат являются циклическими, тогда, согласно уравнениям (5.15), будем иметь

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j}=0, \quad \dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \qquad (5.18)$$

Отсюда следует, что

$$p_j=c_j \text{ и } \dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial c_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \qquad (5.19)$$

где c_j — постоянные интегрирования.

Функция Гамильтона теперь будет зависеть от времени t, $s-k$ обобщенных координат, $s-k$ обобщенных импульсов и k постоянных интегрирования c_j:

$$H=H\left(t,\ q_{k+1},\ q_{k+2},\ \ldots,\ q_s,\ p_{k+1},\ p_{k+2},\ \ldots,\ p_s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k\right). \qquad (5.20)$$

Используя (5.15), получим

$$\dot{p}_\lambda=-\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}, \quad \dot{q}_\lambda=\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \qquad (\lambda=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ s). \qquad (5.21)$$

Это система $2s-2k$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно p_λ и q_λ. Решения этих уравнений будут содержать $2\lambda=2(s-k)$ произвольных постоянных интегрирования c_λ и c'_λ, а также постоянные интегрирования c_j, т. е.

$$\left.\begin{aligned} p_\lambda&=p_\lambda\left(t,\ c_\lambda,\ c'_\lambda,\ c_j\right),\\ q_\lambda&=q_\lambda\left(t,\ c_\lambda,\ c'_\lambda,\ c_j\right)\end{aligned}\right\} \qquad (\lambda=k+1,\ \ldots,s). \qquad (5.22)$$

Подставляя эти решения в функцию H (5.20) и затем пользуясь выражениями (5.19):

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial c_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

найдем

$$q_j = \int \frac{\partial H}{\partial c_j}\, dt + c'_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \qquad (5.23)$$

где c'_j — новые постоянные интегрирования.

Следовательно, при наличии k циклических координат решение задачи сводится к решению системы уравнений (5.21), порядок которой уменьшен по сравнению с первоначальной на $2k$ единиц.

Пример 42. Составить канонические уравнения Гамильтона для гироскопического маятника (рис. 5.4). Груз B имеет массу m_2 и

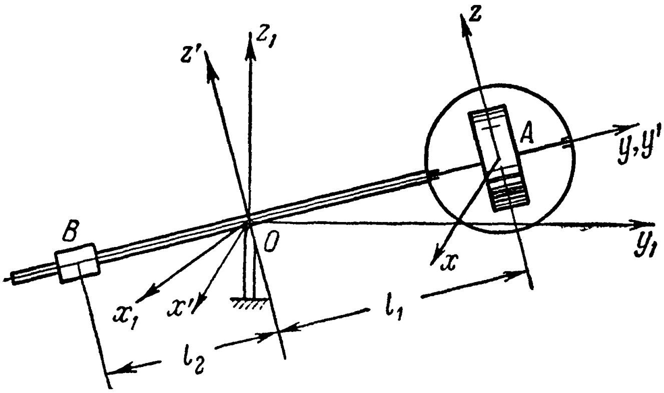

Рис. 5.4.

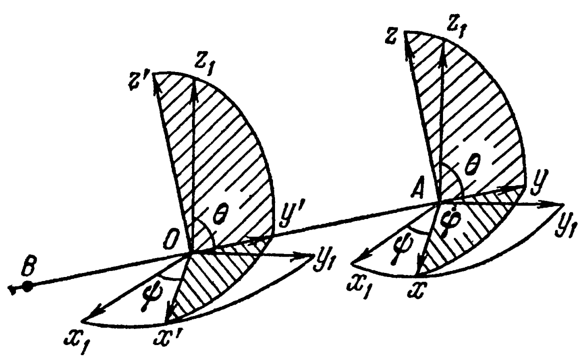

Рис. 5.5.

расположен от неподвижной точки O на расстоянии l_2. Ротор имеет массу m_1, а его центр тяжести находится на расстоянии l_1 от неподвижной точки O. Массой стержня и кольца пренебречь.

Ось y' подвижной системы координат $Ox'y'z'$ направим по стержню, а ось x' — горизонтально, перпендикулярно к стержню. Си-

стема координат $Axyz$ имеет оси, параллельные осям системы координат $Ox'y'z'$ (рис. 5.5). За обобщенные координаты примем

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi,$$

где φ — угол вращения ротора вокруг оси y. Координаты центра тяжести ротора и груза соответственно определяются формулами

$$x_{1A} = -l_1 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1A} = l_1 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1A} = l_1 \sin\theta;$$
$$x_{1B} = l_2 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1B} = -l_2 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1B} = -l_2 \cos\theta.$$

Проекциями угловой скорости ротора на оси системы координат $Axyz$ будут

$$\omega_x = \dot\theta, \quad \omega_y = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, \quad \omega_z = \dot\psi \sin\theta.$$

Составим выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\right) + \frac{1}{2} m_2 v_B^2.$$

Так как

$$v_A^2 = \dot x_{1A}^2 + \dot y_{1A}^2 + \dot z_{1A}^2 = l_1^2\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta\right),$$
$$v_B^2 = \dot x_{1B}^2 + \dot y_{1B}^2 + \dot z_{1B}^2 = l_2^2\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta\right)$$

и $I_x = I_z$, то

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x\right)\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta\right) + I_y\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\right)^2\right].$$

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = m_1 g z_{1A} + m_2 g z_{1B} = \left(m_1 l_1 - m_2 l_2\right) g \cos\theta.$$

Найдем теперь обобщенные импульсы:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = A\dot\psi \sin^2\theta + I_y\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\right)\cos\theta,$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = A\dot\theta,$$
$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = I_y\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\right),$$

где $A = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x$. Решая эти уравнения относительно $\dot\psi$, $\dot\theta$ и $\dot\varphi$, получим

$$\dot\psi = \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot\theta = \frac{p_2}{A},$$
$$\dot\varphi = \frac{p_3}{I_y} - \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Функция Гамильтона будет выражаться формулой

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(p_1 - p_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{p_3^2}{2I_y} + (m_1l_1 - m_2l_2)\, g\cos\theta.$$

Обобщенные координаты ψ и φ являются циклическими. Значит,

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial\psi} = 0, \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0.$$

То есть

$$p_1 = c, \qquad p_3 = c_3,$$

и, следовательно,

$$H = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(c_1 - c_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{c_3^2}{2I_y} + (m_1l_1 - m_2l_2)\, g\cos\theta.$$

Составляем теперь канонические уравнения:

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{(m_1l_1 - m_2l_2)}{A}\, g\sin\theta - \frac{(c_1 - c_3\cos\theta)(c_3 - c_1\cos\theta)}{A\sin^3\theta},$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{A}, \qquad \dot{\psi} = \frac{c_1 - c_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{c_3}{I_y} - \frac{c_1 - c_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Отметим, что данная система имеет интеграл

$$H = T + \Pi = h$$

(интеграл энергии).

§ 5.4. Скобки Пуассона. Теорема Якоби — Пуассона

Если для всех значений q_m и p_m, являющихся решением канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \qquad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{5.24}$$

какая-либо функция $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s)$ сохраняет постоянное значение, то

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = c$$

называется *интегралом* канонических уравнений Гамильтона.

Например, при стационарных связях и консервативных силах функция Гамильтона является постоянной величиной, следовательно,

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = h$$

есть интеграл канонических уравнений.

Если обобщенная координата q_k является циклической, то

$$p_k = \text{const}$$

— интеграл уравнений (5.24).

Предположим, что нам известны $2s$ интегралов уравнений (5.24), т. е.

$$f_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2s), \tag{5.25}$$

где c_k — постоянные величины *). Разрешая систему уравнений (5.25) относительно q_m и p_m, получим

$$\left.\begin{aligned} q_m &= q_m(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2s}), \\ p_m &= p_m(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2s}) \end{aligned}\right\} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{5.26}$$

т. е. решение уравнений (5.24). Если же число интегралов меньше $2s$, то с их помощью можно судить лишь о некоторых свойствах движения. Отсюда вытекает естественное желание получить возможно большее число независимых интегралов.

Прежде чем перейдем к доказательству теоремы Якоби — Пуассона, которая в некоторых случаях позволяет по двум имеющимся интегралам получить третий, рассмотрим некоторые свойства так называемых скобок Пуассона. Пусть функции φ и ψ являются функциями t и q_m, p_m $(m = 1, 2, \ldots, s)$. Для операций над этими функциями вида

$$\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\right) = \sum_{m=1}^{s}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_m} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial q_m} & \dfrac{\partial\psi}{\partial p_m} \end{vmatrix}$$

Пуассон ввел обозначение (φ, ψ), т. е.

$$(\varphi, \psi) = \sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial\psi}{\partial p_m} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_m}\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\right). \tag{5.27}$$

*) Предполагаем, что все интегралы являются независимыми, т. е. в число рассматриваемых интегралов не включаются произвольные функции от этих интегралов.

Это специальное преобразование называется *скобками Пуассона.* Из рассмотрения выражения (5.27) следует:

1) $(\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$

2) $(c\varphi, \psi) = c(\varphi, \psi),$

3) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \psi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$

(c — постоянная величина).

Если кроме функций φ и ψ рассмотреть еще какую-либо функцию $\chi(t, q_m, p_m)$, то в соответствии с выражением (5.27) можно записать:

4) $(\varphi + \psi, \chi) = (\varphi, \chi) + (\psi, \chi).$

Кроме того, можно получить путем непосредственных вычислений *тождество Пуассона*:

5) $$((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = 0, \tag{5.28}$$

которое, однако, можно доказать и несколько проще. Каждый из членов этого тождества в силу (5.27) должен содержать вторые производные от функций, входящих во внутренние скобки Пуассона, причем каждая вторая производная какой-либо функции будет умножаться на первые производные от двух других функций. Значит, если доказать, что рассматриваемое выражение (5.28) не содержит вторых производных от функций φ, ψ и χ, то тождество будет доказано. Рассмотрим сумму

$$((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi) = ((\psi, \chi), \varphi) - ((\varphi, \chi), \psi) = \\ = (\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi))$$

и докажем, что она не содержит членов с вторыми производными от функции χ. На основании (5.27) можно записать

$$(\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi)) = \\ = \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k}(\varphi, \chi) - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k}(\varphi, \chi)\right] - \\ - \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k}(\psi, \chi) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k}(\psi, \chi)\right]$$

или

$$(\psi, (\varphi, \chi)) - (\varphi, (\psi, \chi)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right] \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \frac{\partial \chi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial \chi}{\partial q_m} \right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_m} \frac{\partial \chi}{\partial p_m} - \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \frac{\partial \chi}{\partial q_m} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_k \partial p_m} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} - \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_k \partial q_m} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_m} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial p_m} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_m} \right) \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_m} \right] + \text{члены, не содержащие вторых производных от } \chi.$$

Если в полученном выражении заменить m на k, а k на m, то выражение под знаком двойной суммы изменит знак на обратный. Следовательно, двойная сумма равна нулю и исходное выражение

$$((\psi, \chi), \varphi) + ((\chi, \varphi), \psi)$$

не содержит членов со вторыми производными от χ. Аналогично можно показать, что выражения

$$((\varphi, \psi), \chi) + ((\psi, \chi), \varphi) \quad \text{и} \quad ((\varphi, \psi), \chi) + ((\chi, \varphi), \psi)$$

не содержат соответственно членов со вторыми производными от ψ и φ. Тем самым доказывается тождество Пуассона.

Предположим теперь, что функция

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s)$$

такова, что для $q_1, q_2, \ldots, q_s$, являющихся решениями канонических уравнений (5.24), справедливо равенство

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) = c,$$

выполняющееся для заданного c при определенных начальных условиях*). Отсюда получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial f}{\partial p_m}\dot{p}_m\right)=0$$

или, используя уравнения (5.24),

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}-\frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q_m}\right)=0,$$

т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)=0. \tag{5.29}$$

При помощи этого тождества можно доказать, что $(f\psi)$ будет интегралом канонических уравнений, если f и ψ являются интегралами этих уравнений (теорема Якоби — Пуассона). Действительно, так как f и ψ — интегралы уравнений (5.24), то в соответствии с тождеством (5.29) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f, H)=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}+(\psi, H)=0. \tag{5.30}$$

С другой стороны, на основании свойства скобок Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \psi\right)+\left(f, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

Значит, выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)+((f, \psi), H)$$

с учетом (5.30) может быть переписано в виде

$$-((f, H), \psi)-(f, (\psi, H))+((f, \psi), H),$$

или

$$((f, \psi), H)+((\psi, H), f)+((H, f), \psi),$$

а это тождественно равно нулю в силу (5.28).

Таким образом, доказано, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(f, \psi)+((f, \psi), H)=0,$$

*) То есть $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s)=c$ является интегралом канонических уравнений (5.24).

т. е. (f, ψ) является интегралом канонических уравнений (5.24). При нахождении нового интеграла при помощи теоремы Якоби — Пуассона следует иметь в виду, что он может оказаться тождественно равным нулю или быть функцией от ранее известных интегралов (т. е. не будет независимым).

Пример 43. Для свободной изолированной материальной точки выполняются интегралы количества движения

$$p_x = m\dot{x} = c_1, \qquad p_y = m\dot{y} = c_2, \qquad p_z = m\dot{z} = c_3$$

и момента количества движения

$$K_x = yp_z - zp_y = c_4, \qquad K_y = zp_x - xp_z = c_5, \qquad K_z = xp_y - yp_x = c_6.$$

Покажем, что

$$(K_x, K_y) = K_z = c_6.$$

В самом деле,

$$(K_x, K_y) = \frac{\partial K_x}{\partial x}\frac{\partial K_y}{\partial p_x} - \frac{\partial K_x}{\partial p_x}\frac{\partial K_y}{\partial x} + \frac{\partial K_x}{\partial y}\frac{\partial K_y}{\partial p_y} - \frac{\partial K_x}{\partial p_y}\frac{\partial K_y}{\partial y} + \\ + \frac{\partial K_x}{\partial z}\frac{\partial K_y}{\partial p_z} - \frac{\partial K_x}{\partial p_z}\frac{\partial K_y}{\partial z} = (-p_y)(-x) - yp_x = xp_y - yp_x = c_6.$$

§ 5.5. Канонические преобразования

При составлении уравнений Лагранжа или канонических уравнений Гамильтона выбор обобщенных координат был произволен в том смысле, что за такие координаты можно было выбрать любые s независимых между собой величин, однозначно определяющих положение рассматриваемой динамической системы. Формальный вид этих уравнений не зависит от той системы обобщенных координат, которая выбирается. Это значит, что если от каких-либо обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ перейти к новым обобщенным координатам $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$ по формулам

$$q'_m = q'_m(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \quad (5.31)$$

то вид уравнений Лагранжа и Гамильтона останется прежним. Преобразование кородинат (5.31) называется *точечным*.

Если же в канонических уравнениях (5.15), содержащих $2s+1$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s, t$,

перейти к новым переменным $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, p'_1, p'_2, \ldots, p'_s$, t по формулам *)

$$\left.\begin{aligned} q'_m &= q'_m(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s), \\ p'_m &= p'_m(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) \end{aligned}\right\} \qquad (5.32)$$
$$(m = 1, 2, \ldots, s),$$

то в общем случае канонические уравнения своей формы (5.15) не сохранят. Однако существуют такие преобразования переменных, при которых канонические уравнения сохраняют свою форму. Такие преобразования называются *каноническими*.

Прежде чем рассмотреть канонические преобразования, познакомимся с преобразованием Лежандра, имеющим в теории канонических преобразований существенное значение. Пусть дана какая-либо функция ψ от $n = 2s+1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (5.33)$$

которую будем называть *производящей* по отношению к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введем новые переменные, определяемые из соотношений

$$y_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1). \qquad (5.34)$$

Тогда дифференциал от функции ψ будет иметь вид

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n-1} y_i\, dx_i + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n. \qquad (5.35)$$

Разрешая уравнения (5.34) относительно старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, получим **)

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эти формулы обратного преобразования от новых переменных к старым можно записать в форме (5.34). Для

---

*) Предполагается, что уравнения (5.32) разрешимы относительно $q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s$.

**) Мы предполагаем, что функция ψ обладает для этого всеми необходимыми свойствами.

этого выберем функцию Ψ от переменных y_1, y_2, ..., y_{n-1}, x_n:

$$\Psi = \Psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n),$$

так, чтобы

$$x_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.36}$$

Полный дифференциал от функции Ψ равен

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n. \tag{5.37}$$

Функцию Ψ называют производящей по отношению к переменным y_1, y_2, ..., y_{n-1}. Переход от переменных x_1, x_2, ..., x_{n-1} к переменным y_1, y_2, ..., y_{n-1} и от функции ψ к функции Ψ называется *преобразованием Лежандра.*

Это преобразование можно осуществить с помощью преобразования

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - \psi. \tag{5.38}$$

В самом деле, так как

$$d\Psi = \sum_{j=1}^{n-1} x_i\, dy_i + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\, dx_i - d\psi,$$

а $d\psi$ выражается формулой (5.35), то

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, dy_i - \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n.$$

Сравнивая это выражение с выражением (5.37) и приняв во внимание соотношения (5.36), получим

$$x_i = \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_n}. \tag{5.39}$$

Таким образом, соотношения (5.34), (5.36) и (5.39) определяют прямое и обратное преобразования (преобразования Лежандра).

Пусть теперь требуется перейти от старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ к новым переменным $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_s, y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_{n-1}, x_n$ и от функции $\psi(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ к функции $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_s, y_{s+1}, \ldots, y_{n-1}, x_n)$. В этом случае преобразование можно осуществить с помощью формулы

$$\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i y_i - \psi. \tag{5.40}$$

Так как

$$d\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i\, dy_i + \sum_{i=s+1}^{n-1} y_i\, dx_i - d\psi,$$

а

$$d\psi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=s+1}^{n-1} y_i\, dx_i + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dx_n,$$

то

$$d\Psi = \sum_{i=s+1}^{n-1} x_i\, dy_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx_i - \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\, dx_n.$$

С другой стороны,

$$d\Psi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=s+1}^{n-1} \frac{\partial\Psi}{\partial y_i}\, dy_i + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Сравнивая правые части этих выражений, получим формулы преобразования

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),\\ x_i &= \frac{\partial\Psi}{\partial y_i} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1),\\ \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x_n}. \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

В качестве примера преобразования Лежандра рассмотрим переход от переменных Лагранжа $t, q_m, \dot q_m$ к переменным Гамильтона t, q_m, p_m. Напомним, что

$p_m = \partial L/\partial \dot{q}_m$ [см. равенство (5.3)]. Из уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

следует, что

$$\dot{p}_m = \frac{\partial L}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

В качестве производящей функции от переменных Лагранжа возьмем функцию Лагранжа

$$L = L(q_m, \dot{q}_m, t).$$

В соответствии с формулой (5.40) производящей функцией Ψ будет

$$\Psi = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m p_m - L,$$

т. е. функция Ψ совпадает с функцией Гамильтона (5.6):

$$H = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m p_m - L.$$

На основании формул (5.41) теперь имеем

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_m} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Однако $\frac{\partial L}{\partial q_m} = \dot{p}_m$ и, следовательно,

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Эти последние уравнения представляют собой уравнения Гамильтона.

Перейдем к рассмотрению канонических преобразований. В общем случае канонических преобразований при переходе от переменных q_m, p_m, t к переменным q'_m, p'_m, t канонические уравнения

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

переходят в уравнения вида

$$\dot{p}'_m = -\frac{\partial H'}{\partial q'_m}, \quad \dot{q}'_m = \frac{\partial H'}{\partial p'_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

где функция H' уже не является прежней функцией Гамильтона H, преобразованной к новым переменным $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, p'_1, p'_2, \ldots, p'_s$. Если функция Гамильтона при каноническом преобразовании не меняется, т. е. $H' = H$, то такое преобразование называется *вполне каноническим*.

Рассмотрим это преобразование несколько подробнее. Пусть $H(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s)$ — старая функция Гамильтона, а $H'(q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, p'_1, p'_2, \ldots$ $\ldots, p'_s)$ — новая функция Гамильтона. Рассмотрим выражение

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \, dq_m - H \, dt = \sum_{m=1}^{s} p'_m \, dq'_m - H' \, dt + d\psi, \tag{5.42}$$

где ψ — произвольная функция от старых и новых обобщенных координат $(q_1, \ldots, q_s, q'_1, \ldots, q'_s)$. Это выражение можно переписать в виде

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H = \sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m - H' + \frac{d\psi}{dt} \tag{5.43}$$

или

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m - H' + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \psi}{\partial q'_m} \dot{q}'_m.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{m=1}^{s} \left(p_m - \frac{\partial \psi}{\partial q_m}\right) \dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \left(p'_m + \frac{\partial \psi}{\partial q'_m}\right) \dot{q}'_m + (H - H') = 0.$$

Это выражение будет тождественно выполняться, если

$$p_m - \frac{\partial \psi}{\partial q_m} = 0, \quad p'_m + \frac{\partial \psi}{\partial q'_m} = 0, \quad H - H' = 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда и получаем формулы нужных преобразований

$$p_m = \frac{\partial\psi}{\partial q_m}, \quad p'_m = -\frac{\partial\psi}{\partial q'_m}, \quad H' = H \quad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Докажем, что рассмотренное преобразование является вполне каноническим. Так как $H' = H$, то на основании выражения (5.43) можно записать

$$\delta\left(\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m\right) = \delta\left(\sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m + \frac{d\psi}{dt}\right)$$

или

$$\sum_{m=1}^{s} \delta p_m \dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} p_m \delta\dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \delta p'_m \dot{q}'_m + \sum_{m=1}^{s} p'_m \delta\dot{q}'_m + \delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Так как

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \delta\dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} p_m \delta\left(\frac{dq_m}{dt}\right) = \sum_{m=1}^{s} p_m \frac{d}{dt}(\delta q_m) = \frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}_m \delta q_m,$$

$$\sum_{m=1}^{s} p'_m \delta\dot{q}'_m = \frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{s} p'_m \delta q'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m \delta q'_m,$$

$$\delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta\psi),$$

то

$$\sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}_m \delta q_m = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}'_m \delta p'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m \delta q'_m + \frac{d}{dt}\left[-\sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} p'_m \delta q'_m + \delta\psi\right].$$

Соотношение (5.42) при $H' = H$ может быть записано в виде

$$\sum_{m=1}^{s} p_m\,\delta q_m = \sum_{m=1}^{s} p'_m\,\delta q'_m + \delta\psi,$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m\,\delta p_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}_m\,\delta q_m = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}'_m\,\delta p'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m\,\delta q'_m. \tag{5.43'}$$

Для переменных q_m и p_m канонические уравнения имеют вид

$$\dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m}, \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Значит, левую часть полученного выражения (5.43′) можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_m}\,\delta p_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_m}\,\delta q_m = \delta H.$$

Таким образом,

$$\delta H = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}'_m\,\delta p'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m\,\delta q'_m. \tag{5.44}$$

В силу того, что $H' = H$,

$$\delta H = \delta H',$$

и, следовательно, выражение (5.44) утверждает, что

$$\delta H' = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}'_m\,\delta p'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m\,\delta q'_m. \tag{5.45}$$

С другой стороны,

$$\delta H' = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H'}{\partial q'_m}\,\delta q'_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H'}{\partial p'_m}\,\delta p'_m. \tag{5.46}$$

Значит,

$$\sum_{m=1}^{s}\left(\dot{q}'_m - \frac{\partial H}{\partial p'_m}\right)\delta p'_m + \sum_{m=1}^{s}\left(-\dot{p}'_m - \frac{\partial H'}{\partial q'_m}\right)\delta q'_m = 0.$$

В силу независимости $\delta p'_m$ и $\delta q'_m$ получим

$$\dot{p}'_m = -\frac{\partial H'}{\partial q'_m}, \quad \dot{q}'_m = \frac{\partial H'}{\partial p'_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Следовательно, рассмотренное преобразование является вполне каноническим.

Таким образом, если задаться какой-либо производящей функцией $\psi(q_1, \ldots, q_s, q'_1, \ldots, q'_s)$, то, в соответствии с соотношениями (5.41), из уравнений

$$p_m = \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

определим все

$$q'_m = q'_m(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s). \tag{5.47}$$

Из уравнений

$$p'_m = -\frac{\partial \psi}{\partial q'_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

после подстановки в них всех $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$, определенных по (5.47), найдем все

$$p'_m = p'_m(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

Новая же функция Гамильтона равна

$$H'(q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, p'_1, p'_2, \ldots, p'_s) = \\ = H(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

В более общем случае, когда функция Гамильтона будет зависеть от времени, т. е. если $H(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s, t)$, можно доказать*), что обратимое преобразование (5.32) будет каноническим, если дифференциальной формой будет

$$\sum_{m=1}^{s} p_m\, dq_m = \sum_{m=1}^{s} p'_m\, dq'_m + H_0\, dt + dV, \tag{5.48}$$

*) Доказательство будет дано в главе 8.

где H_0 и V — произвольные функции от t, старых и новых переменных, удовлетворяются тождественно. Если ввести обозначение

$$H' = H_0 - H,$$

где H — старая функция Гамильтона, то выражение (5.48) можно переписать в виде

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H = \sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m - H' + \frac{dV}{dt}. \tag{5.49}$$

Рассмотрим некоторые типы канонических преобразований.

1. Пусть $V = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, t)$. Тогда соотношение (5.49) будет иметь вид

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H = \\ = \sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m - H' + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \psi}{\partial q_m} \dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \psi}{\partial q'_m} \dot{q}'_m,$$

или

$$\sum_{m=1}^{s} \left(p_m - \frac{\partial \psi}{\partial q_m}\right) \dot{q}_m - \sum_{m=1}^{s} \left(p'_m + \frac{\partial \psi}{\partial q'_m}\right) \dot{q}'_m + \\ + \left(H' - H - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Это условие будет тождественно удовлетворено, если

$$p_m = \frac{\partial \psi}{\partial q_m}, \quad p'_m = -\frac{\partial \psi}{\partial q'_m}, \quad H' = H + \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{5.50}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Теперь из формул (5.50) можно получить искомое преобразование (5.32) и новую функцию Гамильтона H'.

2. Пусть производящая функция ψ будет функцией t, q_1, q_2, ..., q_s, p'_1, p'_2, ..., p'_s, т. е. $\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, p'_1, p'_2, \ldots, p'_s, t)$; тогда, выбирая

$$V = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, p'_1, p'_2, \ldots, p'_s, t) - \sum_{m=1}^{s} p'_m q'_m,$$

перепишем выражение (5.49) в виде

$$\sum_{m=1}^{s} p_m\dot{q}_m - H = \sum_{m=1}^{s} p'_m\dot{q}'_m - H' + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial q_m}\dot{q}_m + \\ + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial p'_m}\dot{p}'_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}'_m q'_m - \sum_{m=1}^{s} p'_m\dot{q}'_m.$$

Отсюда

$$\sum_{m=1}^{s} \left(p_m - \frac{\partial\psi}{\partial q_m}\right)\dot{q}_m + \sum_{m=1}^{s} \left(q'_m - \frac{\partial\psi}{\partial p'_m}\right)\dot{p}'_m + \\ + \left(H' - H - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0.$$

Полученное условие будет удовлетворено, если

$$p_m = \frac{\partial\psi}{\partial q_m}, \quad q'_m = \frac{\partial\psi}{\partial p'_m}, \quad H' = H + \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{5.51}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s),$$

откуда и находится искомое преобразование.

3. Пусть производящая функция ψ будет функцией $q'_1, q'_2, \ldots q'_s, p_1, p_2, \ldots, p_s$ и t, т. е. $\psi = \psi(q'_1, q'_2, \ldots$ $\ldots, q'_s, p_1, p_2, \ldots, p_s, t)$. Примем, что

$$V = \psi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, p_1, p_2, \ldots, p_s, t) + \sum_{m=1}^{s} q_m p_m,$$

и подставим это V в соотношение (5.49):

$$\sum_{m=1}^{s} p_m\dot{q}_m - H = \sum_{m=1}^{s} p'_m\dot{q}'_m - H' + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial q'_m}\dot{q}'_m + \\ + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial\psi}{\partial p_m}\dot{p}_m + \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m p_m + \sum_{m=1}^{s} q_m\dot{p}_m.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{m=1}^{s}\left(p'_m+\frac{\partial\psi}{\partial q'_m}\right)\dot q'_m+\sum_{m=1}^{s}\left(q_m+\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\right)\dot p_m+\\+\left(H-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Это соотношение удовлетворяется, если

$$p'_m=-\frac{\partial\psi}{\partial q'_m},\quad q_m=-\frac{\partial\psi}{\partial p_m},\quad H'=H+\frac{\partial\psi}{\partial t}\qquad(5.52)$$

$$(m=1,2,\ \ldots,\ s).$$

Из уравнений (5.52) определяется искомое преобразование.

4. Пусть производящая функция ψ есть функция t, старых и новых импульсов, т. е. $\psi=\psi(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s,\ p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_s,\ t)$. Выберем

$$V=\psi(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s,\ p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_s,\ t)-\\-\sum_{m=1}^{s}p'_mq'_m+\sum_{m=1}^{s}p_mq_m.$$

Соотношение (5.49) будет иметь вид

$$\sum_{m=1}^{s}p_m\dot q_m-H=\sum_{m=1}^{s}p'_m\dot q'_m-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\dot p_m+\\+\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial\psi}{\partial p'_m}\dot p'_m-\sum_{m=1}^{s}\dot p'_mq'_m-\sum_{m=1}^{s}p'_m\dot q'_m+\\+\sum_{m=1}^{s}\dot p_mq_m+\sum_{m=1}^{s}p_m\dot q_m,$$

или

$$\sum_{m=1}^{s}\left(q_m+\frac{\partial\psi}{\partial p_m}\right)\dot p_m+\sum_{m=1}^{s}\left(-q'_m+\frac{\partial\psi}{\partial p'_m}\right)\dot p'_m+\\+\left(H-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=0.$$

Это соотношение будет удовлетворено, если

$$q_m = -\frac{\partial\psi}{\partial p_m}, \quad q'_m = \frac{\partial\psi}{\partial p'_m}, \quad H' = H + \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{5.53}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Очевидно, что, задавшись какой-либо функцией $\psi(p_m, p'_m, t)$, из уравнений

$$q_m = -\frac{\partial\psi}{\partial p_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

можно найти p'_m как функции t, q_m, p_m. Далее, в уравнения

$$q'_m = \frac{\partial\psi}{\partial p'_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

подставляются найденные p'_m как функции t, q_m, p_m, и, таким образом, находится искомое преобразование (5.32).

Пример 44. Пусть производящая функция имеет вид

$$\psi = \psi(q_m, p'_m, t) = \sum_{m=1}^{s} f_m(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)\, p'_m + h(q_1, q_2, \ldots, q_s, t).$$

На основании зависимостей (5.51) имеем

$$p_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial f_m}{\partial q_m} p'_m + \frac{\partial h}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

$$q'_m = f_m(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

т. е. при таком каноническом преобразовании обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$ преобразуются только между собой. Такие преобразования называются *точечными*.

Пример 45. Для цилиндрических координат r, φ и z введем обозначения $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Рассмотрим свободную материальную точку, находящуюся в поле силы тяжести. Для такой точки

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 q_1^2 + \dot{q}_3^2\right), \qquad \Pi = mgq_3$$

и

$$p_1 = m\dot{q}_1, \qquad p_2 = mq_1^2\dot{q}_2, \qquad p_3 = m\dot{q}_3.$$

Поэтому

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}+p_3^2\right)+mgq_3.$$

Рассмотрим каноническое преобразование, получающееся при производящей функции вида

$$\psi=p_1'q_1\cos q_2+p_2'q_1\sin q_2+p_3'q_3.$$

На основании (5.51) имеем

$$p_1=\frac{\partial\psi}{\partial q_1}=p_1'\cos q_2+p_2'\sin q_2,$$

$$p_2=\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=-p_1'q_1\sin q_2+p_2'q_1\cos q_2,$$

$$p_3=\frac{\partial\psi}{\partial q_3}=p_3'$$

и

$$q_1'=\frac{\partial\psi}{\partial p_1'}=q_1\cos q_2,$$

$$q_2'=\frac{\partial\psi}{\partial p_2'}=q_1\sin q_2,$$

$$q_3'=\frac{\partial\psi}{\partial p_3'}=q_3.$$

Из первых трех уравнений находим

$$p_1'=m\left(\dot q_1\cos q_2-q_1\dot q_2\sin q_2\right)=m\dot q_1',$$

$$p_2'=m\left(\dot q_1\sin q_2+q_1\dot q_2\cos q_2\right)=m\dot q_2',$$

$$p_3'=m\dot q_3=m\dot q_3'.$$

Новая функция H' будет иметь вид

$$H'=\frac{1}{2m}\left(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2\right)+mgq_3'.$$

Очевидно, что новые координаты q_1', q_2', q_3' являются декартовыми координатами точки.

Пример 46. Рассмотрим прямолинейное движение точки под действием восстанавливающей силы $F=c\,|x|$, где x — расстояние точки от притягивающего центра.

Приняв за обобщенную координату координату x, т. е. положив $q = x$, найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}.$$

Так как $L = T - \Pi = \frac{1}{2}(m\dot{q}^2 - cq^2)$, то

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}.$$

Напишем выражение для функции Гамильтона:

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} k^2 m q^2,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$. Составим канонические уравнения:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k^2 m q, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Так как рассматриваемая система консервативная, то функция Гамильтона равна полной энергии системы, т. е. $H = h$. Найдем такое каноническое преобразование, при котором бы новая функция Гамильтона не содержала новой координаты q', а новый импульс входил бы в первой степени, т. е.

$$H' = kp'.$$

Воспользуемся вторым типом канонических преобразований, когда $\psi = \psi(q, p')$. В соответствии с формулами (5.51) $H = H'$, т. е.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + k^2 m q\right) = kp'.$$

Отсюда

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial q} = \sqrt{2mkp' - k^2 m^2 q} \tag{5.54}$$

и

$$\psi = \int_0^q \sqrt{2mkp' - k^2 m^2 q}\, dq.$$

Так как

$$q' = \frac{\partial \psi}{\partial p'} = \int_0^q \frac{mk\, dq}{\sqrt{2mkp' - k^2 m^2 q}},$$

то

$$q' = \arcsin \sqrt{\frac{km}{2p'}}\, q$$

и

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{km}} \sin q'.$$

Из формулы (5.54) получаем

$$p = \sqrt{2mkp' - k^2m^2q^2} = \sqrt{2mkp'}\cos q'.$$

Новая координата q' является циклической, так как она не входит в функцию Гамильтона. Следовательно, новый импульс является постоянной величиной

$$p' = \frac{h}{k}.$$

Координату q' определим из канонического уравнения

$$\dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = k.$$

Следовательно, $q' = kt + \varepsilon$, и, значит,

$$p = \sqrt{2mh}\cos(kt + \varepsilon), \qquad q = \sqrt{\frac{2h}{mk^2}}\sin(kt + \varepsilon).$$

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ЯКОБИ

§ 6.1. Уравнение Гамильтона — Якоби

Пусть движение голономной системы описывается каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (6.1)$$

В § 5.3 было выяснено, что наличие k циклических обобщенных координат у рассматриваемой системы позволяет получить для этих координат решение (5.23). В связи с этим естественно поставить вопрос о возможности нахождения такого канонического преобразования, при котором в преобразованных уравнениях Гамильтона функция H' не будет содержать обобщенных координат, т. е. все новые обобщенные координаты будут циклическими. Предположим, что, пользуясь вторым типом (см. стр. 146) канонических преобразований, где

$$\psi = \psi(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_s,\ t), \qquad (6.2)$$

$$p_m = \frac{\partial \psi}{\partial q_m}, \quad q'_m = \frac{\partial \psi}{\partial p'_m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \qquad (6.3)$$

мы найдем новую функцию Гамильтона вида

$$H' = f(p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_s), \qquad (6.4)$$

где f — любая функция. Тогда для новых переменных будет

$$\dot{p}'_m = -\frac{\partial H'}{\partial q'_m} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \qquad (6.5)$$

$$\dot{q}'_m = \frac{\partial H'}{\partial p'_m} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s) \qquad (6.6)$$

и

$$H' = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{6.7}$$

Из уравнений (6.5) следует:

$$p'_m = \alpha_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{6.8}$$

где α_m — постоянные интегрирования. Подставляя теперь выражения (6.8) в уравнения (6.6), получим

$$q'_m = \omega_m t + \beta_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{6.9}$$

где $\omega_m = \left(\frac{\partial f}{\partial p'_m}\right)_{p'_m = \alpha_m}$ — постоянные величины, а β_m — постоянные интегрирования. Выражения (6.8) и (6.9) представляют собой систему интегралов уравнений (6.5) и (6.6). Используя теперь преобразование (6.3), мы могли бы получить старые переменные q_m и p_m, т. е. решить задачу о движении системы*). Однако мы не можем этого сделать, так как нам неизвестна функция ψ. Рассмотрим соотношение (6.7) с учетом выражения (6.4):

$$H(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(p'_1,\ p'_2,\ \ldots,\ p'_s).$$

Заменяя в этом соотношении в соответствии с формулами (6.3) и (6.8) переменные p_m на $\frac{\partial \psi}{\partial q_m}$ и p'_m на α_m, будем иметь

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1},\ \frac{\partial \psi}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial \psi}{\partial q_s},\ t\right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = \\ = f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s). \tag{6.10}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется *уравнением Гамильтона — Якоби.* Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, которому должна удовлетворять производящая функция $\psi(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s,\ t)$ с основными перемен-

*) Мы предполагаем, что функции f и ψ обладают свойствами, необходимыми для такого преобразования.

ными $q_1, q_2, \ldots, q_s, t$. Так как в выражении (6.4) функция f произвольная, то мы можем принять

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = 0. \qquad (6.11)$$

Тогда уравнение (6.10) примет вид

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \qquad (6.12)$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных, называется *полным интегралом* этого уравнения. Функция ψ в уравнение (6.12) входит только через свои производные. Это значит, что одна произвольная постоянная будет входить в полный интеграл в виде слагаемого, т. е. полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$S = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, t) + \alpha_0, \qquad (6.13)$$

где α_0 — произвольная постоянная. В самом деле, если $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, t)$ является решением уравнения (6.12), то в силу того, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_m} = \frac{\partial\psi}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, s), \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (6.14)$$

функция S является решением уравнения (6.12), содержащим $s+1$ произвольных постоянных, т. е. является его полным интегралом.

Итак, если известен полный интеграл (6 13) уравнения Гамильтона — Якоби, то для получения решения исходной системы уравнений (6.1) следует за производящую функцию взять функцию

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, t),$$

затем в формулах канонического преобразования (6.3) заменить p'_m на α_m и q'_m, в соответствии с выражением (6.9), на β_m. Тогда будем иметь

$$p_m = \frac{\partial\psi}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, s), \qquad (6.15)$$

$$\beta_m = \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, s), \qquad (6.16)$$

так как при $f=0$

$$\omega_m = \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \equiv 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{6.17}$$

Уравнения (6.16) дают возможность выразить обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ через время t и $2s$ произвольных постоянных α_m и β_m $(m=1, 2, \ldots, s)$.

Таким образом, мы показали, что если известен полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, то нет необходимости интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1), т. е. задача интегрирования системы (6.1) заменяется задачей нахождения полного интеграла уравнения (6.12).

Пример 47. Составим уравнение Гамильтона — Якоби для точки, движущейся в однородном поле силы тяжести.

За обобщенные координаты примем $q_1 = x$ и $q_2 = y$ — декартовы координаты точки.

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \qquad \Pi = mgq_2.$$

Так как $p_1 = m\dot{q}_1$ и $p_2 = m\dot{q}_2$, $H = T + \Pi$, то функция Гамильтона

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + mgq_2 \tag{6.18}$$

и, следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби будет иметь вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\right)^2 + mgq_2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{6.19}$$

Предположим, что рассматриваемая механическая система подчинена стационарным связям. В этом случае функция Гамильтона от времени явно не зависит и уравнение (6.12) имеет вид

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \frac{\partial \psi}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial \psi}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{6.20}$$

Вместо этого уравнения можно рассматривать более простое, приняв

$$\psi(q_1,\ \ldots,\ q_s,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s,\ t) = \\ = -ht + W(q_1,\ \ldots,\ q_s,\ h,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s), \tag{6.21}$$

где $h=\alpha_1$, α_2, ..., α_s — произвольные постоянные. Так как при этом

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-h,\quad \frac{\partial\psi}{\partial q_m}=\frac{\partial W}{\partial q_m}\qquad (m=1,\ 2,\ \dots,\ s),\tag{6.22}$$

то вместо уравнения (6.20) будем иметь

$$H\left(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \frac{\partial W}{\partial q_2},\ \dots,\ \frac{\partial W}{\partial q_s}\right)=h,\tag{6.23}$$

где h — полная механическая энергия [см. равенство (5.8)]. Это уравнение называется *укороченным уравнением Гамильтона — Якоби.* Проинтегрировав его, найдем

$$W=W(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots,\ \alpha_s)$$

и, следовательно,

$$\psi=-ht+W(q_1,\ \dots,\ q_s,\ h,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial h}=-t+\frac{\partial W}{\partial h},\tag{6.24}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m}=\frac{\partial W}{\partial\alpha_m}\qquad (m=2,\ 3,\ \dots,\ s).\tag{6.25}$$

На основании (6.16)

$$\beta_1=-t+\frac{\partial W}{\partial h},\quad \beta_m=\frac{\partial W}{\partial\alpha_m}\qquad (m=2,\ 3,\ \dots,\ s).$$

Положив $\beta_1=-t_0$, окончательно получим

$$\frac{\partial W}{\partial h}=t-t_0,\tag{6.26}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha_m}=\beta_m\qquad (m=2,\ 3,\ \dots,\ s),\tag{6.27}$$

а также

$$\frac{\partial W}{\partial q_m}=p_m\qquad (m=1,\ 2,\ \dots,\ s).$$

Из формул (6.26) и (6.27) теперь можно найти обобщенные координаты q_1, q_2, ..., q_s. Заметим, что время t входит только в уравнение (6.26), уравнения же (6.27)

времени не содержат и представляют собой уравнения связи между обобщенными координатами.

Итак, показано, что интегрирование канонических уравнений Гамильтона можно заменить нахождением полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби. В общем случае обе эти задачи обладают одинаковой трудностью, однако имеются динамические задачи, для которых нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби оказывается более простым, чем интегрирование канонических уравнений Гамильтона.

В следующем параграфе мы рассмотрим метод разделения переменных, позволяющий в ряде важных случаев получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

§ 6.2. Метод разделения переменных

Предположим, что часть обобщенных координат, например $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k<s)$, и соответствующие им обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_k$ входят в функцию Гамильтона в виде функций $\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots$ $\ldots, \varphi_k(q_k, p_k)$, причем каждая из этих функций не зависит от времени t и обобщенных координат и обобщенных импульсов, не имеющих индекса функции.

Функция Гамильтона будет при этом иметь вид

$$H = H[\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots, \varphi_k(q_k, p_k), \\ q_{k+1}, \ldots, q_s, p_{k+1}, \ldots, p_s, t].$$

Напишем соответствующее этой функции уравнение Гамильтона — Якоби:

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right), \ldots, \varphi_k\left(q_k, \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right), \\ q_{k+1}, \ldots, q_s, \frac{\partial\psi}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_s}, t\right] + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \quad (6.28)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \ldots + \psi_k(q_k) + \psi^*(q_{k+1}, \ldots, q_s, t). \quad (6.29)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (6.28) получим

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{d\psi_1}{dq_1}\right), \ldots, \varphi_k\left(q_k, \frac{d\psi_k}{dq_k}\right),\right.$$

$$\left. q_{k+1}, \ldots, q_s, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_s}, t\right] + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0. \qquad (6.30)$$

Предположим теперь, что выражение (6.29) является решением уравнения (6.28), тогда уравнение (6.30) представляет собой тождество. Это тождество должно сохраняться при любых значениях $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Так как эти координаты между собой независимы, то это может быть только в том случае, если функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ при изменении координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ останутся постоянными. Это значит, что уравнение (6.30) распадается на $k+1$ уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\left(q_1, \dfrac{d\psi_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \\ \varphi_2\left(q_2, \dfrac{d\psi_2}{dq_2}\right) = \alpha_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_k\left(q_k, \dfrac{d\psi_k}{dq_k}\right) = \alpha_k, \end{array}\right\} \qquad (6.31)$$

$$H\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, q_{k+1}, \ldots, q_s, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0, \qquad (6.32)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные. Первые k уравнений (6.31) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Уравнение (6.32) остается уравнением в частных производных, но переменных в этом уравнении меньше, чем в исходном.

Рассмотрим случай наличия циклических координат. Если обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k<s)$ будут циклическими, то соответствующие им обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_k$ будут постоянными величинами, т. е.

$$p_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial q_\mu} = \alpha_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае имеет вид

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial\psi}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{6.33}$$

Так как $\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu} = \alpha_\mu$, функцию ψ запишем в виде

$$\psi = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_\mu q_\mu + \psi^*(q_{k+1}, \ldots, q_s, t).$$

Тогда получим

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial\psi^*}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0. \tag{6.34}$$

В этом уравнении Гамильтона — Якоби функция ψ^* является уже функцией $s-k$ неизвестных.

Для консервативной динамической системы в случае, если функция Гамильтона имеет структуру вида

$$H = H[\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \ldots, \varphi_s(q_s, p_s)],$$

где функции $\varphi_m(q_m, p_m)$ не зависят от времени, обобщенных координат и обобщенных импульсов, имеющих индекс, отличный от индекса функции, уравнение (6.23) принимает вид

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \ldots, \varphi_s\left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right)\right] = h. \tag{6.35}$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \ldots + W_s(q_s) = \sum_{m=1}^{s} W_m(q_m), \tag{6.36}$$

то получим

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{dW_1}{dq_1}\right), \ldots, \varphi_s\left(q_s, \frac{dW_s}{dq_s}\right)\right] = h. \tag{6.37}$$

Если выражение (6.36) будет решением этого уравнения, то в силу независимости обобщенных координат каждая

из функций $\varphi_m(q_m, p_m)$ $(m=1, 2, \ldots, s)$ будет постоянна, т. е.

$$\varphi_m\left(q_m, \frac{dW_m}{dq_m}\right)=\alpha_m \qquad (m=1, 2, \ldots, s), \qquad (6.38)$$

где α_m — произвольные постоянные.

Следовательно, решение задачи сводится к интегрированию обыкновенных уравнений (6.38). Постоянная h в силу зависимостей (6.37) и (6.38) будет функцией $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, т. е.

$$h=H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s).$$

Для функции ψ имеем

$$\psi=-ht+\sum_{m=1}^{s} W_m(q_m, \alpha_m). \qquad (6.39)$$

В соответствии с преобразованием (6.16) окончательное решение задачи получим из формул

$$\frac{dW_m}{d\alpha_m}=\beta_m+\frac{\partial h}{\partial \alpha_m}t \qquad (m=1, 2, \ldots, s), \qquad (6.40)$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим случай, когда консервативная система имеет циклические координаты. Пусть циклическими координатами будут $q_1, q_2, \ldots, q_k (k<s)$, тогда укороченное уравнение Гамильтона — Якоби (6.23) примет вид

$$H\left[q_{k+1}, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial W}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right]=h.$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$W=\sum_{\mu=1}^{k} a_\mu q_\mu+W^*\left(q_{k+1}, \ldots, q_s, \frac{\partial W^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial q_s}\right).$$

Тогда уравнение Гамильтона — Якоби

$$H\left(q_{k+1}, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \frac{\partial W^*}{\partial q_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial q_s}\right)=h$$

служит для определения функции W^* от $s-k$ переменных $q_{k+1}, \ldots, q_s$. Предположим, что мы нашли полный

интеграл этого уравнения (с точностью до аддитивной постоянной)

$$W^* = W^* (q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_s, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_s).$$

Тогда, приняв $h = \alpha_{k+1}$ на основании (6.26) и (6.27), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_{k+1}} = t - t_0, \\ &\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_\mu} = -q_\mu + \beta_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \\ &\frac{\partial W^*}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu \qquad (\nu = k+2, \ldots, s). \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

Из рассмотрения метода разделения переменных следует, что для его применения существен удачный выбор обобщенных координат, так как при одной системе обобщенных координат переменные могут быть разделены, а при другой нет.

§ 6.3. Примеры

Пример 48. Применить метод разделения переменных для уравнения (6.19). Координата q_1 является циклической, поэтому примем

$$\psi = -ht + \alpha_1 q_1 + W_2(q_2),$$

и тогда

$$\frac{\alpha_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + mgq_2 = h.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + mgq_2 = \alpha_2 \quad \text{и} \quad h = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2m}. \tag{6.42}$$

Так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = -\frac{\partial h}{\partial\alpha_1} t + q_1 = -\frac{\alpha_1}{m} t + q_1 = \beta_1,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = -\frac{\partial h}{\partial\alpha_2} t + \frac{dW_2}{d\alpha_2} = -t + \frac{dW_2}{d\alpha_2} = \beta_2,$$

то

$$\left.\begin{aligned} &q_1 = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1, \\ &\frac{dW_2}{d\alpha_2} = t + \beta_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

Найдем теперь решение уравнения (6.42). Для этого перепишем его в следующем виде:

$$\frac{dW_2}{dq_2}=\sqrt{2m(\alpha_2-mgq_2)}.$$

Отсюда

$$W_2=\int dq_2\sqrt{2m(\alpha_2-mgq_2)}+c$$

и

$$\frac{dW_2}{d\alpha_2}=\int\frac{m\,dq_2}{\sqrt{2m(\alpha_2-mgq_2)}}=-\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2-mgq_2)}.$$

Таким образом, имеем

$$q_1=\frac{\alpha_1}{m}t+\beta_1,\quad -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2-mgq_2)}=t+\beta_2,$$

или

$$q_1=\frac{\alpha_1}{m}t+\beta_1,\quad q_2=-\frac{g(t+\beta_2)^2}{2}+\frac{\alpha_2}{mg}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1}=\alpha_1=p_1=m\dot q_1,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_2}=\frac{dW_2}{dq_2}=(t+\beta_2)=p_2=m\dot q_2.$$

Пусть начальными условиями будут: при $t=0$ $q_1=0$, $q_2=h$, $\dot q_1=v_0$, $\dot q_2=0$. Тогда

$$\alpha_1=mv_0,\quad \alpha_2=mgh,\quad \beta_1=0,\quad \beta_2=0$$

и, следовательно,

$$q_1=v_0t,\quad q_2=h-\frac{gt^2}{2}.$$

Пример 49. Рассмотрим плоское движение материальной точки, притягиваемой к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию точки от притягивающего центра. Начало системы координат поместим в притягивающем центре.

Примем за обобщенные координаты декартовы координаты $q_1=x$, $q_2=y$. Кинетическая и потенциальная энергии выразятся при помощи формул

$$T=\frac{m}{2}(\dot q_1^2+\dot q_2^2),\quad \Pi=\frac{c}{2}(q_1^2+q_2^2),$$

где m — масса точки, c — коэффициент пропорциональности. Так как $p_1=m\dot q_1$, $p_2=m\dot q_2$, то функция Гамильтона будет

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{c}{2}q_1^2+\frac{c}{2}q_2^2$$

и уравнение Гамильтона — Якоби примет вид уравнения (6.35):

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\frac{c}{2}q_1^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\frac{c}{2}q_2^2=h.$$

Приняв для W выражение (6.36)

$$W=W_1(q)+W_2(q_2)$$

в соответствии с условиями (6.38), получим для определения W_1 и W_2 обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2+\frac{c}{2}q_1^2=\alpha_1,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2+\frac{c}{2}q_2^2=\alpha_2,$$

причем $h=\alpha_1+\alpha_2$. Отсюда

$$W_1=\int\sqrt{m\left(2\alpha_1-cq_1^2\right)}\,dq_1,$$

$$W_2=\int\sqrt{m\left(2\alpha_2-cq_2^2\right)}\,dq_2.$$

В соответствии с выражениями (6.40) имеем

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1}=\beta_1+t,\qquad \frac{dW_2}{d\alpha_2}=\beta_2+t.$$

Но

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1}=\sqrt{\frac{m}{c}}\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}},\qquad \frac{dW_2}{d\alpha_2}=\sqrt{\frac{m}{c}}\arcsin\frac{q_2}{\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}},$$

и, следовательно,

$$\arcsin\frac{q_1}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}}=\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_1),\qquad \arcsin\frac{q_2}{\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}}=\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_2)$$

Отсюда

$$q_1=\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_1),\qquad q_2=\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_2).$$

Так как

$$\frac{dW_1}{dq_1}=p_1=\sqrt{m\left(2\alpha_1-cq_1^2\right)}=m\dot{q}_1,$$

$$\frac{dW_2}{dq_2}=p_2=\sqrt{m\left(2\alpha_2-cq_2^2\right)}=m\dot{q}_2,$$

то, введя начальные условия, можно определить постоянные α_1, α_2, β_1 и β_2. Пусть, например, при $t=0$ $q_1=a$, $q_2=0$, $\dot q_1=0$, $\dot q_2=v_0$. Уравнениями для определения α_1, α_2, β_1 и β_2 будут

$$a=\sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_1,\qquad 0=\sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_2,$$

$$\sqrt{m(2\alpha_1-ca^2)}=0,\quad \sqrt{2\alpha_2 m}=mv_0.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_1=\frac{ca^2}{2},\qquad \alpha_2=\frac{mv_0^2}{2},\qquad \beta_1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{c}},\qquad \beta_2=0,$$

и, значит,

$$q_1=a\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t,$$

$$q_2=v_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

Таким образом, решение этой задачи свелось к операциям дифференцирования и вычисления квадратур.

Пример 50. Применим теорию Якоби к гироскопическому маятнику.

Для этой задачи функция Гамильтона имеет вид (см. пример 42)

$$H=\frac{1}{2A}\left[p_2^2+\frac{(p_1-p_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right]+\frac{p_3^2}{2I_y}+(m_1l_1-m_2l_2)\,g\cos q_2.$$

Напишем уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{1}{2A}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\sin^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}-\frac{\partial W}{\partial q_3}\cos q_2\right)^2\right]+\\ +\frac{1}{2I_y}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2+(m_1l_1-m_2l_2)\,g\cos q_2=h.$$

Координаты q_1 и q_3 циклические, поэтому, если решение искать в виде

$$W=\alpha_1q_1+W_2(q_2)+\alpha_3q_3,$$

то получим

$$\frac{1}{2A}\left[\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2+\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right]+\frac{\alpha_3^2}{2I_y}+(m_1l_1-m_2l_2)\,g\cos q_2=h. \quad (6.44)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Приняв $h=\alpha_2$, на основании выражений (6.41) имеем

$$\frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2}=t-t_0, \qquad (6.45)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1} &= -q_1+\beta_1,\\ \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_3} &= -q_3+\beta_3.\end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

Перепишем уравнение (6.44) в виде

$$\sin q_2 \frac{dW_2}{dq_2} = \\ = \sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)g\sin^2 q_2\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\sin^2 q_2\right]-(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}$$

или

$$W_2 = \\ = \int\sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)\,g\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\right]-\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}}\,dq_2 = \\ = \int D\,dq_2,$$

где

$$D=\sqrt{2A\left[(m_2l_2-m_1l_1)\,g\cos q_2+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right)\right]-\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}}.$$

В соответствии с формулами (6.45) и (6.46) получим

$$\int\frac{A\,dq_2}{D}=t-t_0,\quad -\int\frac{(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)\,dq_2}{\sin^2 q_2 D}=-q_1+\beta_1,$$

$$-\int\left[\frac{2A\alpha_3}{I_y}-\frac{2(\alpha_1-\alpha_3\cos q_2)\cos q_2}{\sin^2 q_2}\right]\frac{dq_2}{D}=-q_3+\beta_3.$$

Таким образом, задача свелась к квадратурам.

§ 6.4. Теорема Лиувилля

Как было показано в предыдущих параграфах, применение метода разделения переменных позволяет получить полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Однако этот метод не всегда применим. Поэтому естественно заранее выяснить, при каком виде гамильтоновой функции (или отдельно кинетической и потенциальной энергий) возможно применение метода разде-

ления переменных. Исследованию этого вопроса были посвящены работы Лиувилля, Штеккеля, Гурса и др.*).

Остановимся лишь на рассмотрении практически важного случая Лиувилля. Если в голономной системе с s степенями свободы кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} f \sum_{m=1}^{s} A_m(q_m)\,\dot{q}_m^2, \\ \Pi &= \frac{1}{f} \sum_{m=1}^{s} \Pi_m(q_m), \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

где $f = \sum\limits_{m=1}^{s} F_m(q_m)$, то интегрирование уравнения Гамильтона — Якоби приводит к квадратурам (теорема Лиувилля).

Для доказательства этой теоремы составим функцию Гамильтона. В соответствии с выражениями (6.47) имеем

$$p_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = f A_m(q_m)\,\dot{q}_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{6.48}$$

Составим функцию Гамильтона:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} f \sum_{m=1}^{s} A_m(q_m)\,\dot{q}_m^2 + \frac{1}{f} \sum_{m=1}^{s} \Pi_m(q_m) = h$$

или, учитывая соотношение (6.48),

$$H = \frac{1}{f} \sum_{m=1}^{s} \left[\frac{p_m^2}{2A_m(q_m)} + \Pi_m(q_m) \right] = h.$$

Вводя замену

$$p_m = \frac{\partial W}{\partial q_m},$$

*) Изложение результатов этих работ можно найти в книгах: Ф. Р. Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1936; А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

получим уравнение Гамильтона — Якоби

$$\sum_{m=1}^{s}\left[\frac{1}{2A_m(q_m)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_m}\right)^2+\Pi_m(q_m)-hF_m(q_m)\right]=0. \qquad (6.49)$$

Будем искать полный интеграл этого уравнения в виде

$$W=W_1(q_1)+W_2(q_2)+\ \ldots\ +W_s(q_s).$$

Уравнение (6.49) при этом примет вид

$$\sum_{m=1}^{s}\left[\frac{1}{2A_m(q_m)}\left(\frac{dW_m}{dq_m}\right)^2+\Pi_m(q_m)-hF_m(q_m)\right]=0. \qquad (6.50)$$

Каждое слагаемое левой части этого уравнения зависит только от одной обобщенной координаты q_m, поэтому можно применить метод разделения переменных. Уравнению (6.49) можно удовлетворить, если каждое из слагаемых приравнять постоянной величине, т. е.

$$\frac{1}{2A_m(q_m)}\left(\frac{dW_m}{dq_m}\right)^2+\Pi_m(q_m)-hF_m(q_m)=\alpha_m, \qquad (6.51)$$

причем должно выполняться условие

$$\alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_s=0. \qquad (6.52)$$

Каждое из уравнений (6.51) является дифференциальным уравнением первого порядка, интегрирование которого сводится к квадратуре

$$W_m=\int\sqrt{2A_m(q_m)\left[\alpha_m+hF_m(q_m)-\Pi_m(q_m)\right]}\,dq_m. \qquad (6.53)$$

Следовательно, полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$W=\sum_{m=1}^{s}\int\sqrt{2A_m(q_m)\left[\alpha_m+hF_m(q_m)-\Pi_m(q_m)\right]}\,dq_m. \qquad (6.54)$$

Этот интеграл содержит s произвольных постоянных

$$h,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s-1}$$

и постоянную α_s, которая, в соответствии с формулой (6.52), равна

$$\alpha_s = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{s-1}). \tag{6.55}$$

Таким образом, теорема Лиувилля доказана.

Пример 51. Для обобщенных координат $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$ в примере 41 (§ 5.2) кинетическая и потенциальная энергии имеют вид, соответствующий выражениям (6.47). Поэтому можно применить метод разделения переменных.

Функция Гамильтона в этом случае будет

$$H = \frac{1}{2ma^2\left(q_1^2 - q_2^2\right)}\left[p_1^2\left(q_1^2 - 1\right) + p_2^2\left(1 - q_2^2\right)\right] - \\ - \frac{m}{a\left(q_1^2 - q_2^2\right)}\left[(c_1 + c_2) q_1 - (c_1 - c_2) q_2\right],$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2\left(q_1^2 - 1\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2\left(1 - q_2^2\right) - 2m^2a\left[\left(c_1 + c_2\right) q_1 - \left(c_1 - c_2\right) q_2\right] - \\ - 2ma^2h\left(q_1^2 - q_2^2\right) = 0.$$

Принимая, что

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

получим

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2\left(q_1^2 - 1\right) - 2m^2a\left(c_1 + c_2\right) q_1 - 2ma^2hq_1^2 + \\ + \left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)\left(1 - q_2^2\right) + 2m^2a\left(c_1 - c_2\right) q_2 + 2ma^2hq_2^2 = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2\left(q_1^2 - 1\right) - 2m^2a\left(c_1 + c_2\right) q_1 - 2ma^2hq_1^2 = \alpha_1,$$

$$\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2\left(1 - q_2^2\right) + 2m^2a\left(c_1 - c_2\right) q_2 + 2ma^2hq_2^2 = -\alpha_1.$$

Отсюда имеем

$$W_1 = \int\sqrt{\frac{\alpha_1 + 2m^2a\left(c_1 + c_2\right) q_1 + 2ma^2hq_1^2}{q_1^2 - 1}}\, dq_1,$$

$$W_2 = \int\sqrt{\frac{-\alpha_1 - 2m^2a\left(c_1 - c_2\right) q_2 - 2ma^2hq_2^2}{1 - q_2^2}}\, dq_2.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$W = W_1 + W_2$$

содержит две произвольные постоянные α_1 и h. Конечные интегралы уравнений движения найдем, применяя формулы (6.26) и (6.27):

$$\int \frac{ma^2 q_1^2\, dq_1}{\sqrt{q_1^2 - 1}\,\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a (c_1 + c_2)\, q_1 + 2ma^2 h q_1^2}} + \\ + \int \frac{ma^2 q_2^2\, dq_2}{\sqrt{q_2^2 - 1}\,\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a (c_1 - c_2)\, q_2 + 2ma^2 h q_2^2}} = t - t_0,$$

$$\int \frac{dq_1}{2\sqrt{q_1^2 - 1}\,\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a (c_1 + c_2)\, q_2 + 2ma^2 h q_1^2}} + \\ + \int \frac{dq_2}{2\sqrt{q_2^2 - 1}\,\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a (c_1 - c_2)\, q_2 + 2ma^2 h q_2^2}} = \beta_1,$$

т. е. задача сводится к вычислению квадратур.

§ 6.5. Переменные действие — угол *)

В этом параграфе рассматривается метод применения уравнения Гамильтона — Якоби к материальным системам, совершающим периодические движения. Использование этого метода целесообразно в тех случаях, когда не требуется полного исследования поведения материальной системы, а требуется определить только частоты периодических движений.

Мы рассмотрим только такие материальные системы, для которых возможен выбор канонических переменных, допускающих полную разделимость переменных, т. е. такие системы, для которых функция W определяется из уравнений (6.35):

$$H\left[\varphi_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \varphi_2\left(q_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right), \ldots, \varphi_s\left(q_s, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right)\right] = h. \qquad (6.56)$$

В этом случае W может быть представлена в виде

$$W = \sum_{m=1}^{s} W_m(q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s). \qquad (6.57)$$

---

*) Более полное рассмотрение этого вопроса можно найти в книге: Г. Гольдстейн, Классическая механика, пер. с англ., Гостехиздат, 1957.

В соответствии с выражением (6.38) уравнение (6.56) примет вид

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = h.$$

Так как

$$p_m = \frac{\partial W}{\partial q_m} = \frac{\partial W_m}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{6.58}$$

то

$$p_m = p_m(q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s). \tag{6.59}$$

Пусть q_m и p_m — координатные оси прямоугольной декартовой системы координат. Плоскость этих переменных называют фазовой плоскостью. Точка на этой плоскости с координатами (q_m, p_m) называется «изображающей» точкой. При движении системы координаты q_m и p_m изменяются и изображающая точка на плоскости $q_m p_m$ описывает кривую, которую называют фазовой кривой.

В дальнейшем мы будем предполагать, что на фазовых плоскостях $q_m p_m$ фазовые кривые (6.59) будут или замкнуты, или p_m будет периодической функцией относительно q_m.

Введем в рассмотрение новые переменные $J_1, J_2, \ldots, \ldots, J_s$, которые называются действиями и определяются формулами

$$J_m = \oint p_m \, dq_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{6.60}$$

где символ $\oint$ означает, что интеграл берется за полный период изменения q_m. В соответствии с выражением (6.58) имеем

$$J_m = \oint \frac{\partial W_m}{\partial q_m} dq_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{6.61}$$

Переменные J_m являются функциями независимых величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$; так как изменение каждой пары q_m, p_m (по предположению) независимо, то переменные J_m также независимы. Эти переменные J_m примем за новые обобщенные импульсы.

Выразим теперь величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ с помощью соотношений (6.61) через $J_1, J_2, \ldots, J_s$ и внесем

полученные значения в выражения для W и H. В результате этого получим

$$W = W(q_1, q_2, \ldots, q_s, J_1, J_2, \ldots, J_s) \tag{6.62}$$

и

$$H(J_1, J_2, \ldots, J_s) = h. \tag{6.63}$$

За обобщенные координаты, соответствующие обобщенным импульсам, примем величины

$$w_m = \frac{\partial W}{\partial J_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{6.64}$$

Величины w_m называются *угловыми переменными*. В соответствии с выражениями (6.6)

$$\dot{w}_m = \frac{\partial H}{\partial J_m} = \nu_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{6.65}$$

где ν_m — постоянные величины, являющиеся функциями $J_1, J_2, \ldots, J_s$. Из соотношений (6.65) следует:

$$w_m = \nu_m t + \beta_m, \tag{6.66}$$

где β_m — постоянные интегрирования. Пусть τ_m — период изменения функции w_m. Тогда

$$w_m(t + \tau_m) = \nu_m(t + \tau_m) + \beta_m. \tag{6.67}$$

Вычитая из выражения (6.67) выражение (6.66), получим изменение w_m за период:

$$\Delta w_m = \nu_m \tau_m. \tag{6.68}$$

С другой стороны, изменение Δw_m можно получить следующим образом. Согласно выражению (6.64)

$$w_m = \frac{\partial W}{\partial J_m}.$$

Пусть теперь координаты $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_s$ сохраняют постоянные значения, а координата q_i совершает полный цикл своего изменения. Тогда функция w_m изменится на величину

$$\Delta w_m = \oint d'w_m, \tag{6.69}$$

где

$$d'w_m = \frac{\partial^2 W}{\partial J_m \, \partial q_i} dq_i$$

— изменение w_m вследствие изменения q_i. Таким образом,

$$\Delta w_m = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J_m \, \partial q_i} dq_i, \tag{6.70}$$

или

$$\Delta w_m = \frac{\partial}{\partial J_m} \oint \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i;$$

в соответствии с формулами (6.58) и (6.60) имеем

$$\Delta w_m = \frac{\partial}{\partial J_m} \oint p_i \, dq_i = \frac{\partial J_i}{\partial J_m}.$$

Отсюда следует, что если $i = m$, то

$$\Delta w_m = 1; \tag{6.71}$$

если же $i \neq m$, то $\Delta w_m = 0$. Сравнивая выражения (6.68) и (6.71), получим $\nu_m \tau_m = 1$ и

$$\nu_m = \frac{1}{\tau_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{6.72}$$

Следовательно, величины ν_m представляют собой частоты периодических изменений q_m.

Пример 52. Найти частоты главных колебаний механической системы, состоящей из двух физических маятников, представляющих собой однородные стержни одинаковых поперечных размеров и сделанных из одного и того же материала. Маятники подвешены на одной горизонтали при помощи шарниров O_1, O_2 и соединены между собой пружиной, жесткость которой равна c. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса маятников. Остальные размеры указаны на рис. 6.1.

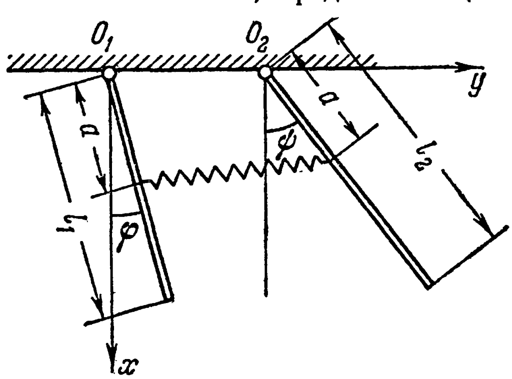

Рис. 6.1.

Положение маятников будем определять углами их отклонения от вертикали, т. е. углами φ и ψ. Выражение для кинетической энергии в этом случае имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2,$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции маятников относительно их осей вращения. Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = m_1 g \frac{l_1}{2}(1-\cos\varphi) + m_2 g \frac{l_2}{2}(1-\cos\psi) + \frac{c\lambda^2}{2},$$

где m_1 и m_2 — массы маятников, λ — удлинение пружины. Для малых отклонений

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \qquad \cos\psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}, \qquad \lambda = a\varphi - a\psi,$$

следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 g \frac{l_1}{2} + ca^2\right)\varphi^2 - 2ca^2\varphi\psi + \left(m_2 g \frac{l_2}{2} + ca^2\right)\psi^2\right].$$

Для упрощения выкладок рассмотрим частный случай, когда

$$l_1 = l_2 = l, \quad m_1 = m_2 = m, \quad I_1 = I_2 = I.$$

В этом случае

$$T = \frac{1}{2} I (\dot\varphi^2 + \dot\psi^2), \tag{6.73}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}[a_1(\varphi^2 + \psi^2) - 2ca^2\varphi\psi], \tag{6.74}$$

где $a_1 = mg\dfrac{l}{2} + ca^2$.

Если теперь составить уравнение Гамильтона — Якоби, то обнаружится, что переменные не разделяются. Поэтому мы перейдем к другим координатам q_1 и q_2, которые связаны с координатами φ и ψ формулами *)

$$\varphi = q_1 + q_2, \quad \psi = q_1 - q_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} I\left(\dot q_1^2 + \dot q_2^2\right), \quad \Pi = a_2 q_1^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2,$$

где $a_2 = \dfrac{mgl}{2}$. Так как $p_1 = 2I\dot q_1$, $p_2 = 2I\dot q_2$, то уравнение (6.56) примет вид

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 + \frac{1}{4I}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2 = h. \tag{6.75}$$

---

*) Вводимые координаты q_1 и q_2 представляют собой нормальные координаты, т. е. координаты, для которых выражения для кинетической и потенциальной энергий не содержат членов с произведениями обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Учитывая, что функция W имеет вид соотношения (6.57), получим

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 + \frac{1}{4I}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) q_2^2 = h.$$

В соответствии с зависимостями (6.38)

$$\frac{1}{4I}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 + a_2 q_1^2 = \alpha_1, \qquad \frac{1}{4I}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 + \left(a_2 + 2ca^2\right) = \alpha_2,$$

т. е.

$$H = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{6.76}$$

Теперь найдем

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{dW_1}{dq_1} = 2\sqrt{Ia_2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2} - q_1^2},$$

$$p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2} = \frac{dW_2}{dq_2} = 2\sqrt{I\left(a_2 + 2ca^2\right)}\sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2} - q_2^2}.$$

Используя формулы (6.61), получим

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= 2\sqrt{Ia_2}\oint\sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2} - q_1^2}\,dq_1, \\ J_2 &= 2\sqrt{I\left(a_2 + 2ca^2\right)}\oint\sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2} - q_2^2}\,dq_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.77}$$

Введя в эти выражения замену

$$q_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{a_2}}\sin\gamma, \qquad q_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{a_2 + 2ca^2}}\sin\chi,$$

получим

$$J_1 = 2\sqrt{\frac{I}{a_2}}\,\alpha_1\int_0^{2\pi}\cos^2\gamma\,d\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{I}{a_2}}\,\alpha_1. \tag{6.78}$$

Аналогично

$$J_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{a_2 + 2ca^2}}\,\alpha_2. \tag{6.79}$$

Из выражений (6.78) и (6.79) следует:

$$\alpha_1 = \frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}}, \qquad \alpha_2 = \frac{J_2}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2 + 2ca^2}{I}}. \tag{6.80}$$

Равенство (6.76) теперь принимает вид

$$H=\frac{J_1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}}+\frac{J_2}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2+2ca^2}{I}}.$$

Следовательно.

$$\nu_1=\frac{\partial H}{\partial J_1}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2}{I}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}},$$

$$\nu_2=\frac{\partial H}{\partial J_2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_2+2ca^2}{I}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}+\frac{6ca^2}{ml^2}},$$

так как $a_2=\frac{mgl}{2}$, $I=\frac{ml^2}{3}$.

ГЛАВА 7

НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 7.1. Число степеней свободы неголономной системы. Примеры неголономных систем

Наиболее существенные успехи в развитии механики неголономных систем связаны с именами С. А. Чаплыгина, В. Вольтерра, П. В. Воронца и П. Аппеля. В этой главе будут рассмотрены лишь некоторые методы составления дифференциальных уравнений движения неголономных систем. Достаточно полное изложение механики неголономных систем содержится в монографиях А. И. Лурье *) и Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева **).

В этой главе будут рассмотрены системы с линейными неголономными связями, т. е. со связями, в уравнения которых проекции скоростей входят линейно. Уравнения таких связей имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}\dot{x}_i + B_{\nu i}\dot{y}_i + C_{\nu i}\dot{z}_i) + D_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, d) \tag{7.1}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}\,dx_i + B_{\nu i}\,dy_i + C_{\nu i}\,dz_i) + D_\nu\,dt = 0 \tag{7.2}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, d),$$

где d — число неголономных связей, $A_{\nu i}$, $B_{\nu i}$, $C_{\nu i}$, D_ν — функции координат, а в случае нестационарных связей и времени. Если $D_\nu \equiv 0$, то указанные связи называются однородными линейными неголономными.

---

*) А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

**) Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, Динамика неголономных систем, «Наука», 1967.

Пусть на материальную систему наложено k голономных связей

$$f_j(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t)=0 \tag{7.3}$$

и d неголономных связей вида (7.2). Тогда вариации координат должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{\nu i}\,\delta x_i+B_{\nu i}\,\delta y_i+C_{\nu i}\,\delta z_i)=0 \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ d). \tag{7.5}$$

Следовательно, если эти $k+d$ уравнений независимы, то число независимых вариаций координат равно $3n-k-d$. Это число независимых вариаций координат называется *числом степеней свободы неголономной системы.*

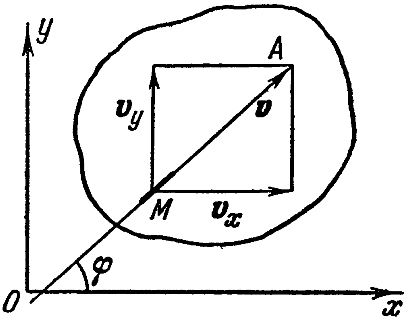

Рис. 7.1.

Остановимся на одном свойстве неголономных связей, не отмеченном нами ранее. Всякая геометрическая связь является также и кинематической связью, т. е. ограничения, накладываемые на координаты точек, накладывают ограничения и на скорости точек. Но оказывается, что наличие неинтегрируемых кинематических связей может не влиять на независимость координат. Это будет показано в приводимых ниже примерах.

Приведем примеры неголономных систем.

Пример 53. Пусть тело A перемещается по неподвижной плоскости, касаясь ее в трех точках (рис. 7.1). Предположим, что одна из точек касания M является точкой касания острого конька поверхности плоскости и может перемещаться только вдоль плоскости конька, движение же двух других точек по плоскости пусть будет свободным (так как расположение этих точек несущественно, то на рисунке они не показаны).

Поскольку тело A совершает плоское движение, его положение может быть определено координатами x и y точки M и углом φ, образуемым плоскостью конька с осью x. Условие отсутствия проскальзывания конька может быть записано в виде $v_y/v_x=\operatorname{tg}\varphi$ или, что то же,

$$\dot y-\dot x\operatorname{tg}\varphi=0. \tag{7.6}$$

Итак, из-за наличия связи (7.6) *изменения* координат x, y и φ не могут быть произвольными; однако в силу неинтегрируемости уравнения связи (7.6) эти координаты остаются независимыми.

Пример 54. Рассмотрим качение без скольжения шара по горизонтальной плоскости (рис. 7.2). Положение шара будет определено, если задать координаты x_c и y_c его центра и три угла Эйлера ψ, θ и φ. Условием качения без скольжения будет равенство

$$v_M = v_C + \omega \times \rho = 0, \tag{7.7}$$

где ω — мгновенная угловая скорость шара, ρ — радиус-вектор, оп-

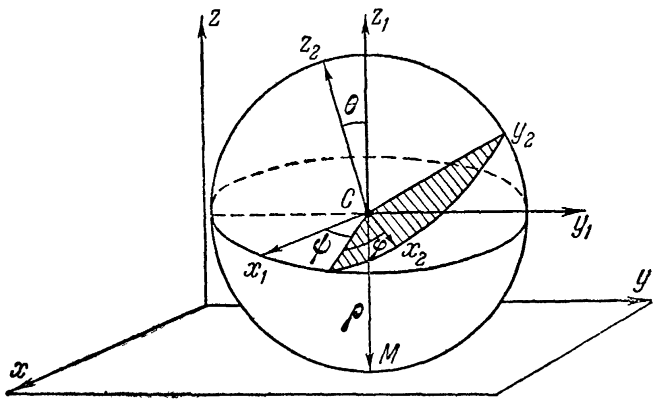

Рис. 7.2.

ределяющий положение точки касания M относительно центра шара. Следовательно, в соответствии с условием (7.7) имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_C - a\omega_y &= 0, \\ \dot{y}_C + a\omega_x &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

где a — радиус шара, ω_x и ω_y — проекции угловой скорости соответственно на ось x и ось y. Так как *)

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi,$$

то два выражения (7.8) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_C - a(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi) &= 0, \\ \dot{y}_C + a(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Эти уравнения неинтегрируемы, следовательно, связь неголономная. Отметим, что в данном примере есть еще и голономная связь $z_C = a$,

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 1, «Наука», 1970.

показывающая, что центр шара находится все время на расстоянии a от плоскости качения шара.

Таким образом, и в этом примере видно, что координаты x_C, y_C, φ, ψ, θ независимы, но изменения их в силу условий (7.9) не могут быть произвольными.

§ 7.2. Уравнения движения для неголономных систем с множителями Лагранжа

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_s$ будут обобщенными координатами механической системы. Пусть на систему наложено d неголономных связей вида

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m}\dot{q}_m + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d). \tag{7.10}$$

В § 3.5 был рассмотрен прием составления уравнений Лагранжа второго рода, если на материальную систему наложены дополнительные связи. Этот прием заключался во введении реакций дополнительных связей в число активных сил.

Воспользуемся этим приемом для учета вводимых неголономных связей (7.10). Так как вводимые связи идеальные, то

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}'_i\,\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{m=1}^{s} Q'_m\,\delta q_m = 0, \tag{7.11}$$

где $\boldsymbol{R}'_i$ — реакции неголономных связей, Q'_m — обобщенные силы, соответствующие этим реакциям. Из уравнений связей (7.10) следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} a_{\nu m}\,\delta q_m = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d).$$

Умножим каждое из этих соотношений на соответствующий множитель Лагранжа λ_ν и сложим полученные выражения между собой:

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu a_{\nu m} = 0. \tag{7.12}$$

Вычитая из выражения (7.11) соотношение (7.12), получим

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m \left(Q'_m - \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu a_{\nu m}\right) = 0.$$

независимых вариаций обобщенных координат $s-d$. Выберем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ так, чтобы множители у остальных d вариаций обращались в нуль; тогда

$$Q'_m = \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu a_{\nu m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{7.13}$$

и, следовательно, уравнения движения при наличии d неголономных связей будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu a_{\nu m}. \tag{7.14}$$

Уравнения (7.14) вместе с уравнениями связей (7.10) образуют систему $s+d$ уравнений относительно неизвестных $(q_1, q_2, \ldots, q_s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$.

Пример 55. Пусть в примере 53 проекция центра тяжести тела A совпадает с точкой касания конька. Рассмотрим движение этого тела по инерции.

Кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2,$$

где M — масса тела, I_C — момент инерции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела. Так как активные силы отсутствуют, то $Q_m = 0$. В силу уравнения (7.6) имеем

$$a_{11} = -\operatorname{tg}\varphi, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0.$$

Следовательно, уравнения (7.14) примут вид

$$M\ddot{x}_C = -\lambda_1 \operatorname{tg}\varphi, \quad M\ddot{y}_1 = \lambda_1, \quad I_C\ddot{\varphi} = 0. \tag{7.15}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение связи (7.6):

$$\dot{y}_C - \dot{x}_C \operatorname{tg}\varphi = 0, \tag{7.16}$$

получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Из третьего уравнения системы (7.15) следует, что

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const},$$

и, следовательно,

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \tag{7.17}$$

(φ_0 — начальное значение угла φ). Исключая λ_1 из первых двух уравнений системы (7.15), получим

$$\ddot{x}_C + \ddot{y}_C \operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{7.18}$$

Переписав уравнения (7.16) и (7.18) в виде

$$\left.\begin{aligned} -\dot{y}_C \cos\varphi + \dot{x}_C \sin\varphi = 0, \\ \ddot{y}_C \sin\varphi + \ddot{x}_C \cos\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

и сложив, получим

$$\ddot{y}_C \sin\varphi + \ddot{x}_C \cos\varphi - \dot{y}_C \cos\varphi + \dot{x}_0 \sin\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{y}_C \sin\varphi + \dot{x}_C \cos\varphi\right) = 0.$$

Отсюда

$$\dot{y}_C \sin\varphi + \dot{x}_C \cos\varphi = c \tag{7.20}$$

(c — произвольная постоянная). Из уравнений (7.19) и (7.20) следует, что

$$\dot{x}_C = c\cos\varphi, \qquad \dot{y}_C = c\sin\varphi.$$

Отсюда имеем

$$x_C = \frac{c}{\omega}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) + x_0, \quad y_C = -\frac{c}{\omega}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right) + y_0,$$

где x_0 и y_0 — начальные значения координат x_C и y_C, $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Пример 56. Составим уравнения (7.14) для однородного шара, катящегося без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости по инерции (§ 7.1, пример 54).

За обобщенные координаты примем

$$q_1 = x_C, \quad q_2 = y_C, \quad q_3 = \varphi, \quad q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta.$$

Уравнения неголономных связей имеют вид (7.9), т. е.

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0,$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0$$

или

$$\dot{q}_1 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \cos q_4 - a\dot{q}_5 \sin q_4 = 0,$$

$$\dot{q}_2 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \sin q_4 + a\dot{q}_5 \cos q_4 = 0.$$

Сравнивая эти выражения с формулами (7.10), получим

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = a\sin q_5 \cos q_4 = a\sin\theta\cos\psi, \\ &a_{14} = 0, \quad a_{15} = -a\sin q_4 = -a\sin\psi, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \\ &a_{23} = a\sin q_5 \sin q_4 = a\sin\theta\sin\psi, \quad a_{24} = 0, \\ &a_{25} = a\cos q_4 = a\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

Кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right);$$

так как шар однородный, то $I_x = I_y = I_z = I$ и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right).$$

Подставляя сюда выражения

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta,$$

будем иметь

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\theta\right).$$

Найдя производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = M\dot{x}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial x_C} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = M\dot{y}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial y_C} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right), \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -I\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta,$$

составим уравнения (7.14), приняв во внимание соотношения (7.21):

$$M\ddot{x}_C = \lambda_1, \quad M\ddot{y}_C = \lambda_2,$$

$$I\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) = \lambda_1, \ a \sin\theta\cos\psi + \lambda_2 a \sin\theta \sin\psi,$$

$$I\left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\right) = 0,$$

$$I\left(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right) = -\lambda_1 a \sin\psi + \lambda_2 a \cos\psi.$$

К этим уравнениям следует присоединить два уравнения неголономных связей:

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0,$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0.$$

Исключая из полученных уравнений λ_1 и λ_2, найдем:

$$I\left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) = Ma\sin\theta\left(\ddot{x}_C\cos\psi + \ddot{y}_C\sin\psi\right),$$

$$I\left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\right) = 0,$$

$$I\left(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right) = Ma\left(\ddot{y}_C\cos\psi - \ddot{x}_C\sin\psi\right),$$

и

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0,$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0.$$

Полученные уравнения являются достаточно сложными. В следующем параграфе эта же задача будет рассмотрена другим методом и будут найдены первые интегралы составленной системы дифференциальных уравнений.

§ 7.3. Уравнения движения в квазикоординатах

В случае голономных стационарных связей уравнения движения в квазикоординатах были получены в § 3.8 (уравнения (3.65)).

Пусть теперь на рассматриваемую систему будет наложено d неголономных связей вида

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m}\dot{q}_m + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d), \tag{7.22}$$

где $a_{\nu m}$, a_ν зависят только от обобщенных координат. Как было показано в § 7.2, уравнения Лагранжа при учете новых связей имеют вид (7.14), т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m + \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu a_{\nu m}. \tag{7.23}$$

Произведя с этими уравнениями те же операции, которые были проведены в § 3.8, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\varkappa}\right) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\varkappa} + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \gamma_{\varkappa\mu j}\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$

$$= P_\varkappa + \sum_{m=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{d} \beta_{m\varkappa} a_{\nu m}\lambda_\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s), \tag{7.24}$$

где T' определяется формулой (3.58), $P_\varkappa$ — формулой (3.56), $\gamma_{\varkappa\mu j}$ — формулой (3.62), а квазискорости выражаются через обобщенные скорости при помощи соотношений

$$\dot{\pi}_\varkappa = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{\varkappa m}\dot{q}_m \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s). \tag{7.25}$$

Выберем теперь в последних d соотношениях (7.25) коэффициенты $\alpha_{\varkappa m}$ следующим образом:

$$\alpha_{\varkappa m} = a_{\nu m},$$

где $\varkappa = s - d + \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, d)$. Правые части уравнений (7.24) при этом примут вид

$$P_\varkappa + \sum_{m=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{m\varkappa} \alpha_{s-d+\nu,\, m} \lambda_\nu,$$

или

$$P_\varkappa + \sum_{\nu=1}^{d} \lambda_\nu \sum_{m=1}^{s} \beta_{m\varkappa} \alpha_{s-d+\nu,\, m} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s). \tag{7.26}$$

На основании свойства

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\varkappa} \alpha_{\mu m} = \begin{cases} 1, & \varkappa = \mu, \\ 0, & \varkappa \neq \mu, \end{cases}$$

делаем заключение о том, что

$$\sum_{m=1}^{s} \beta_{m\varkappa} \alpha_{s-d+\nu,\, m} = 0 \quad \text{для} \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, s-d.$$

Следовательно, уравнения Эйлера — Лагранжа при наличии неголономных связей будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\varkappa}\right) - \frac{\partial T'}{\partial \pi_\varkappa} + \sum_{\mu=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \gamma_{\varkappa\mu j} \frac{\partial T'}{\partial \dot\pi_\mu} \dot\pi_j = P_\varkappa \tag{7.27}$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, s-d).$$

Присоединяя к этим уравнениям d уравнений связей (7.22), получаем систему $s-d$ уравнений второго порядка и d уравнений первого порядка для определения неизвестных $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и $\dot\pi_1, \dot\pi_2, \ldots, \dot\pi_{s-d}$. Оставшиеся последние d уравнений (7.24) могут служить для определения λ_ν, т. е. для определения реакций связей.

Пример 57. Составим уравнения Эйлера — Лагранжа для свободного движения однородного шара по горизонтальной шероховатой плоскости.

Как и в § 7.2, при рассмотрении этой задачи примем $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \theta$. Неголономные связи имеют вид

$$\dot x_C - a\omega_y = 0,$$

$$\dot y_C + a\omega_x = 0.$$

Кинетическая энергия без учета этих связей

$$T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right).$$

За квазискорости примем *)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,\\
\dot{\pi}_2 &= \omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi,\\
\dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi},\\
\dot{\pi}_4 &= a\dot{\theta}\sin\psi - a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{x}_C,\\
\dot{\pi}_5 &= a\dot{\theta}\cos\psi + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{y}_C.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.28)$$

Из этих уравнений найдем обобщенные скорости:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_C = a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4, \quad \dot{y}_C = -a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5,\\
&\dot{\varphi} = \dot{\pi}_1 \frac{\sin\psi}{\sin\theta} - \pi_2 \frac{\cos\psi}{\sin\theta},\\
&\dot{\psi} = -\dot{\pi}_1 \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\cos\theta + \dot{\pi}_2 \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\cos\theta + \dot{\pi}_3,\\
&\dot{\theta} = \dot{\pi}_1\cos\psi + \dot{\pi}_2\sin\psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

Запишем теперь выражение для T':

$$T' = \frac{1}{2} M \left[(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4)^2 + (-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5)^2\right] + \frac{1}{2} I \left(\dot{\pi}_1^2 + \dot{\pi}_2^2 + \dot{\pi}_3^2\right).$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{\pi}_1} = -Ma(-a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5) + I\dot{\pi}_1 = (I + Ma^2)\,\dot{\pi}_1 - Ma\dot{\pi}_5,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_2} = Ma(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4) + I\dot{\pi}_2 = (I + Ma^2)\,\dot{\pi}_2 - Ma\dot{\pi}_4.$$

Поскольку обобщенные координаты в выражение для кинетической энергии не входят, то в соответствии с формулой (3.64)

$$\frac{\partial T'}{\partial \pi_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Перейдем к нахождению трехиндексных коэффициентов $\gamma_{\varkappa\mu f}$. (см. стр. 87). Для этого воспользуемся формулой (3.75):

$$d(\delta\pi_\varkappa) - \delta(d\pi_\varkappa) = \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{s} \gamma_{\mu\varkappa\nu}\,\delta\pi_\mu\, d\pi_\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s). \qquad (7.30)$$

---

*) Заметим, что в силу неголономности связей $\dot{\pi}_4 = 0$, $\dot{\pi}_5 = 0$.

Пользуясь соотношениями (7.28) и (7.29), получим

$$d\pi_1 = d\varphi \sin\theta \sin\psi + d\theta \cos\psi,$$
$$d\pi_2 = - d\varphi \sin\theta \cos\psi + d\theta \sin\psi,$$
$$d\pi_3 = d\varphi \cos\theta + d\psi,$$
$$d\pi_4 = - a\, d\varphi \sin\theta \cos\psi + a\, d\theta \cos\psi - dx_C,$$
$$d\pi_5 = a\, d\varphi \sin\theta \sin\psi + a\, d\theta \cos\psi + dy_C,$$
$$\delta\pi_1 = \delta\varphi \sin\theta \sin\psi + \delta\theta \cos\psi,$$
$$\delta\pi_2 = - \delta\varphi \sin\theta \cos\psi + \delta\theta \sin\psi,$$
$$\delta\pi_3 = \delta\varphi \cos\theta + \delta\psi,$$
$$\delta\pi_4 = - a\, \delta\varphi \sin\theta \cos\psi + a\, \delta\theta \sin\psi - \delta x_C,$$
$$\delta\pi_5 = a\, \delta\varphi \sin\theta \sin\psi + a\, \delta\theta \cos\psi + \delta y_C,$$
$$dx_C = a\, d\pi_2 - d\pi_4, \qquad dy_C = - a\, d\pi_1 + d\pi_5,$$
$$d\varphi = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, d\pi_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, d\pi_2,$$
$$d\psi = - \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \cos\theta\, d\pi_1 + \frac{\cos\psi}{\sin\theta} \cos\theta\, d\pi_2 + d\pi_3,$$
$$d\theta = \cos\psi\, d\pi_1 + \sin\psi\, d\pi_2,$$
$$\delta x_C = a\, \delta\pi_2 - \delta\pi_4, \qquad \delta y_C = - a\, \delta\pi_1 + \delta\pi_5,$$
$$\delta\varphi = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, \delta\pi_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, \delta\pi_2,$$
$$\delta\psi = - \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \cos\theta\, \delta\pi_1 + \frac{\cos\psi}{\sin\theta} \cos\theta\, \delta\pi_2 + \delta\pi_3,$$
$$\delta\theta = \cos\psi\, \delta\pi_1 + \sin\psi\, \delta\pi_2.$$

В соответствии с формулой (7.30) получим

$$d(\delta\pi_1) - \delta(d\pi_1) = - \delta\pi_2\, d\pi_3 + \delta\pi_3\, d\pi_2,$$
$$d(\delta\pi_2) - \delta(d\pi_2) = \delta\pi_1\, d\pi_3 - \delta\pi_3\, d\pi_1,$$
$$d(\delta\pi_3) - \delta(d\pi_3) = - \delta\pi_1\, d\pi_2 + \delta\pi_2\, d\pi_1,$$
$$d(\delta\pi_4) - \delta(d\pi_4) = a\, \delta\pi_1\, d\pi_3 - a\, \delta\pi_3\, d\pi_1,$$
$$d(\delta\pi_5) - \delta(d\pi_5) = - a\, \delta\pi_2\, d\pi_3 + a\, \delta\pi_3\, d\pi_2.$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{213} = -\gamma_{312} = -1, \qquad \gamma_{123} = -\gamma_{321} = 1,$$
$$\gamma_{132} = -\gamma_{231} = -1, \qquad \gamma_{143} = -\gamma_{341} = a, \qquad \gamma_{253} = -\gamma_{352} = -a.$$

Остальные $\gamma_{\mu\varkappa\mu}$ равны нулю.

Подсчитаем теперь суммы:

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{1\mu j}\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$

$$= (I + Ma^2)\,\dot{\pi}_2\dot{\pi}_3 - Ma\dot{\pi}_4\dot{\pi}_3 - Ma\,(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4)\,\dot{\pi}_3 - I\dot{\pi}_3\dot{\pi}_2 = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{2\mu j}\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$

$$= -\,(I + Ma^2)\,\dot{\pi}_1\dot{\pi}_3 + Ma\dot{\pi}_5\dot{\pi}_3 + I\dot{\pi}_3\dot{\pi}_1 - Ma\,(-\,a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5)\,\dot{\pi}_3 = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}\gamma_{3\mu j}\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_\mu}\dot{\pi}_j =$$

$$= (I + Ma^2)\,\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2 - Ma\dot{\pi}_5\dot{\pi}_2 - (I + Ma^2)\,\dot{\pi}_2\dot{\pi}_1 + Ma\dot{\pi}_4\dot{\pi}_1 +$$
$$+ Ma\,(a\dot{\pi}_2 - \dot{\pi}_4)\,\dot{\pi}_1 + Ma\,(-\,a\dot{\pi}_1 + \dot{\pi}_5)\,\dot{\pi}_2 = 0.$$

Следовательно, уравнения Эйлера — Лагранжа (7.27) будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_1}\right) = 0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_2}\right) = 0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial\dot{\pi}_3}\right) = 0. \qquad (7.31)$$

Так как в силу неголономных связей $\dot{\pi}_4 = 0$, $\dot{\pi}_5 = 0$, то из уравнений (7.31) получаем

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x = c_1,\quad \dot{\pi}_2 = \omega_y = c_2,\quad \dot{\pi}_3 = \omega_z = c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Учитывая значения $\dot{\pi}_1$ $\dot{\pi}_2$, $\dot{\pi}_3$, получим

$$\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = c_1,$$

$$-\,\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi = c_2,$$

$$\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = c_3.$$

Из уравнений неголономных связей следует, что $\dot{x}_C = ac_2$, $\dot{y}_C = -\,ac_1$.

Таким образом, первые интегралы уравнений движения известны.

§ 7.4. Уравнения Аппеля *)

Пусть на материальную систему, состоящую из n точек, наложено k голономных и d неголономных связей. Если q_1, q_2, ..., q_s, где $s=3n-k$, — независимые

---

*) Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.

обобщенные координаты, то формулы

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.32}$$

устанавливают связь между декартовыми и обобщенными координатами. Из формул (7.32) следует, что

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.33}$$

и

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \delta q_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.34}$$

Пусть уравнения неголономных связей имеют вид

$$\sum_{\mu=1}^{s} a_{\nu\mu} \dot{q}_\mu + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d). \tag{7.35}$$

Выберем за $s-d$ независимых квазискоростей (по числу степеней свободы) $s-d$ независимых линейных комбинаций обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{s} \alpha_{\varkappa\mu} \dot{q}_\mu \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, s-d). \tag{7.36}$$

Из уравнений (7.35) и (7.36) определим зависимость обобщенных скоростей от квазискоростей $\dot{\pi}_\varkappa$. Очевидно, что это можно сделать в том случае, если определитель системы уравнений (7.35) и (7.36) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{s-d,1} & \alpha_{s-d,2} & \ldots & \alpha_{s-d,s} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{d1} & a_{d2} & \ldots & a_{ds} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть найденная зависимость имеет вид

$$\dot{q}_m = \sum_{\mu=1}^{s-d} b_{m\mu} \dot{\pi}_\mu + b_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{7.37}$$

где $b_{m\mu}$ и b_m — функции времени и обобщенных координат. Величины $\dot{\pi}_\mu$ могут принимать произвольные значения, так как по формулам (7.37) всегда можно подобрать соответствующие им значения $\dot{q}_m$. Подставляя теперь значения $\dot{q}_m$, определяемые формулами (7.37), в формулу (7.33), получим

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \left(\sum_{\mu=1}^{s-d} b_{m\mu}\dot{\pi}_\mu + b_m \right) + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{s-d} \dot{\pi}_\mu \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu} + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} b_m + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}.$$

Введя обозначения

$$\boldsymbol{e}_{i\mu} = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu}, \quad \boldsymbol{e}_i = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} b_m + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t},$$

будем иметь

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\mu=1}^{s-d} \boldsymbol{e}_{i\mu}\dot{\pi}_\mu + \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.38}$$

откуда

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{\mu=1}^{s-d} \boldsymbol{e}_{i\mu}\,\delta\pi_\mu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.39}$$

Вычислим производную по времени от выражения (7.38):

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\mu=1}^{s-d} \boldsymbol{e}_{i\mu}\ddot{\pi}_\mu + \sum_{\mu=1}^{s-d} \dot{\pi}_\mu \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_{i\mu} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_i.$$

Отсюда видно, что частная производная от ускорения $\boldsymbol{w}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ i-й точки по $\ddot{\pi}_\mu$ равна $\boldsymbol{e}_{i\mu}$, т. е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \boldsymbol{e}_{i\mu} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad \mu = 1, 2, \ldots, s-d). \tag{7.40}$$

В общее уравнение динамики [см. § 3.2, (3.17)]

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{F}_i)\,\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

подставим $\delta \boldsymbol{r}_i$, определяемое формулой (7.39):

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{F}_i) \sum_{\mu=1}^{s-d} \boldsymbol{e}_{i\mu} \delta\pi_\mu = 0.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{\mu=1}^{s-d} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{e}_{i\mu} - \Pi_\mu \right) \delta\pi_\mu = 0, \tag{7.41}$$

где обобщенные силы *), соответствующие квазикоординатами π_μ, равны

$$\Pi_\mu = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}_{i\mu} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} b_{m\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, s-d). \tag{7.42}$$

Так как величины $\delta\pi_\mu$ взаимно независимы, то из выражения (7.41) следует:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{e}_{i\mu} = \Pi_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, s-d). \tag{7.43}$$

Используя зависимость (7.40), получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_i \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu,$$

или **)

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{\pi}_\mu} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i w_i^2}{2} = \Pi_\mu. \tag{7.44}$$

Функция

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i w_i^2}{2} \tag{7.45}$$

*) То есть возможная работа определяется формулой

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-d} \Pi_\mu \, \delta\pi_\mu.$$

**) Так как $\boldsymbol{w} \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \ddot{\pi}} = w \dfrac{\partial w}{\partial \ddot{\pi}} = \dfrac{\partial}{\partial \ddot{\pi}} \left(\dfrac{w^2}{2} \right)$.

называется *энергией ускорений* (по аналогии с кинетической энергией). Таким образом, получаем $s-d$ уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\mu} = \Pi_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, s-d), \tag{7.46}$$

которые называются *уравнениями Аппеля.*

Система уравнений (7.46) совместно с соотношениями (7.35) составляет полную систему уравнений для определения декартовых координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ $\ldots, x_n, y_n, z_n$ и квазискоростей $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \ldots, \dot{\pi}_{s-d}$ как функций времени t.

Возьмем теперь в качестве квазискоростей $s-d$ независимых обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-d}$ и выразим через них с помощью соотношений (7.35) остальные d обобщенных скоростей:

$$\dot{q}_{s-d+\nu} = \sum_{\mu=1}^{s-d} h_{s-d+\nu,\,\mu}\dot{q}_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d).$$

Отсюда

$$\delta q_{s-d+\nu} = \sum_{\mu=1}^{s-d} h_{s-d+\nu,\,\mu}\,\delta q_\mu. \tag{7.47}$$

Заменяя теперь в выражении для возможной работы

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j\,\delta q_j$$

вариации $\delta q_{s-d+\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots, d)$ с помощью формулы (7.47), получим

$$\delta A = \sum_{\mu=1}^{s-d} Q_\mu^*\,\delta q_\mu,$$

где

$$Q_\mu^* = Q_\mu - \sum_{\nu=1}^{d} Q_{s-d+\nu} h_{s-d+\nu,\,\mu}$$

— обобщенные силы, соответствующие независимым вариациям $\delta q_\mu (\mu=1, 2, \ldots, s-d)$.

Уравнения Аппеля теперь примут вид *)

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\mu} = Q_\mu^* \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, s-d).$$

Для голономной системы уравнениями Аппеля будут

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

При вычислении функции S бывает целесообразно использовать теорему, аналогичную теореме Кёнига.

Пусть подвижная система координат имеет начало в центре масс материальной системы и движется поступательно. Тогда положение i-й точки системы в неподвижной системе координат определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\rho}_i, \tag{7.48}$$

где $\boldsymbol{r}_C$ — радиус-вектор центра масс в неподвижной системе координат, а $\boldsymbol{\rho}_i$ — радиус-вектор точки i в подвижной системе координат. Из выражения (7.48) следует, что

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{ri}, \tag{7.49}$$

где $\boldsymbol{w}_{ri}$ — относительное ускорение i-й точки. Подставим соотношение (7.49) в выражение для функции S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i w_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (\boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{ri})^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} M w_C^2 + \boldsymbol{w}_i \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_{ri} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i w_{ri}^2}{2},$$

где $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ — масса всей системы. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{w}_{ri} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\rho}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \boldsymbol{\rho}_C) = 0,$$

*) Функция S будет функцией времени t, s обобщенных координат $(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, $s-d$ обобщенных скоростей $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-d})$ и $s-d$ обобщенных ускорений $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_{s-d})$.

так как $\rho_C = 0$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} M w_C^2 + S', \tag{7.50}$$

где

$$S' = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i w_{ri}^2}{2}$$

— ускорение системы в относительном движении.

Пример 58. Составить уравнение Аппеля для тяжелого однородного шара, катящегося без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 7.3).

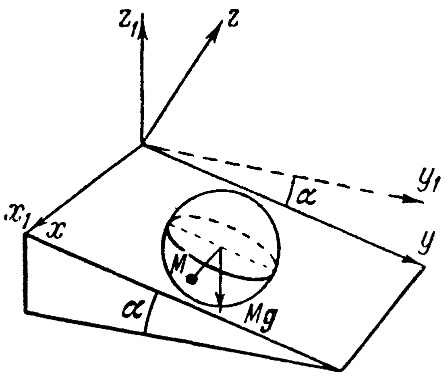

Рис. 7.3.

За независимые обобщенные координаты примем $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \theta$, где x_C, y_C — координаты центра тяжести шара, φ, ψ, θ — углы Эйлера.

Уравнение голономной связи: $z_C = a$ (a — радиус шара).

Уравнения неголономных связей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_C - a\omega_y = 0, \\ \dot{y}_C + a\omega_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

Проекции угловой скорости шара на оси x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

Примем за независимые квазискорости следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\pi}_1 &= \omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \dot{\pi}_2 &= \omega_y = -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \dot{\pi}_3 &= \omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

Из уравнений (7.51) и (7.53) определим обобщенные скорости через независимые квазискорости:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_C = a\dot{\pi}_2, \quad \dot{y}_C = -a\dot{\pi}_1, \\ &\dot{\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta} \dot{\pi}_1 - \frac{\cos\psi}{\sin\theta} \dot{\pi}_2, \\ &\dot{\psi} = -\dot{\pi}_1 \sin\psi \operatorname{ctg}\theta + \dot{\pi}_2 \cos\psi \operatorname{ctg}\theta + \dot{\pi}_3, \\ &\dot{\theta} = \dot{\pi}_1 \cos\psi + \dot{\pi}_2 \sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Найдем теперь энергию ускорений. Используя формулу (7.50), получим

$$S = \frac{1}{2} M w_C^2 + S',$$

или

$$S = \frac{1}{2} M\left(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2\right) + \frac{1}{2} I\left(\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2\right),$$

где M — масса шара, I — осевой момент инерции шара. Используя формулы (7.53) и (7.54), будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\left(I + Ma^2\right)\ddot{\pi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(I + Ma^2\right)\ddot{\pi}_2^2 + \frac{1}{2} I\ddot{\pi}_3^2. \qquad (7.55)$$

Вычислим возможную работу:

$$\delta A = X\,\delta x_C + Y\,\delta y_C + Z\,\delta z_C.$$

Но $X = 0$, $Y = Mg\sin\alpha$, $Z = -Mg\cos\alpha$, а согласно формулам (7.54)

$$\delta x_C = a\,\delta\pi_2, \quad \delta y_C = -a\,\delta\pi_1.$$

Кроме того, $\delta z_C = 0$ (так как $z_C = a$). Следовательно,

$$\delta A = -Mga\sin\alpha\,\delta\pi_1,$$

откуда

$$\Pi_1 = -Mga\sin\alpha, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0.$$

Уравнения Аппеля

$$\frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_1} = \Pi_1, \quad \frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_2} = \Pi_2, \quad \frac{\partial S}{\partial\ddot{\pi}_3} = \Pi_3$$

в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$\left(I + Ma^2\right)\ddot{\pi}_1 = -Mga\sin\alpha,$$

$$\left(I + Ma^2\right)\ddot{\pi}_2 = 0,$$

$$\left(I + Ma^2\right)\ddot{\pi}_3 = 0.$$

Отсюда

$$\dot{\pi}_1 = -\frac{Mga\sin\alpha}{I + Ma^2}\,t + c_1,$$

$$\dot{\pi}_2 = 0,$$

$$\dot{\pi}_3 = 0,$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Для обобщенных скоростей имеем

$$\dot{x}_C = ac_2,$$

$$\dot{y}_C = \frac{Mga^2 \sin\alpha}{I + Ma^2} t - ac_1,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{Mga\sin\alpha}{I + Ma^2} t + c_1\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - c_2\frac{\cos\psi}{\sin\theta},$$

$$\dot{\psi} = \sin\psi \operatorname{ctg}\theta \frac{Mga\sin\alpha}{I + Ma^2} t - c_1 \sin\psi \operatorname{ctg}\theta + c_2 \cos\psi \operatorname{ctg}\theta + c_3,$$

$$\dot{\theta} = -\cos\psi \frac{Mga\sin\alpha}{I + Ma^2} t + c_1\cos\psi + c_2\sin\psi.$$

Дальнейшее интегрирование первых из этих уравнений дает

$$x_C = ac_2 t + c_4,$$

$$y_C = \frac{Mga^2\sin\alpha}{2(I + Ma^2)} t^2 - ac_1 t + c_5.$$

Это значит, что в общем случае центр масс шара движется по параболе, расположенной в плоскости, параллельной наклонной плоскости.

§ 7.5. Вывод уравнений движения неголономной системы из общего уравнения динамики. Уравнения С. А. Чаплыгина

В § 3.3 из общего уравнения динамики было получено соотношение

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{w}_i)\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} = 0. \tag{7.56}$$

Там же показано, что

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{w}_i)\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_m} \equiv Q_m - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m}\right]$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Введем в рассмотрение оператор

$$Tq_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Тогда выражение (7.56) примет вид

$$\sum_{m=1}^{s} \delta q_m (Q_m - T q_m) = 0. \qquad (7.57)$$

Пусть на систему наложено d неголономных связей

$$\sum_{m=1}^{s} a_{\nu m} \dot{q}_m + a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, d). \qquad (7.58)$$

Примем первые $s-d$ обобщенных координат за независимые и выразим обобщенные скорости $\dot{q}_{s-d+1}, \dot{q}_{s-d+2}, \ldots$ $\ldots, \dot{q}_s$ с помощью уравнения неголономных связей через $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{s-d}$:

$$\dot{q}_k = \sum_{m=1}^{s-d} h_{km} \dot{q}_m + h_k \qquad (k = s-d+1, \ldots, s), \quad (7.59)$$

откуда следует, что

$$\delta q_k = \sum_{m=1}^{s-d} h_{km} \delta q_m \qquad (k = s-d+1,\ s-d+2, \ldots, s).$$

Подставляя эти выражения в соотношение (7.57), получим

$$\sum_{m=1}^{s-d} (T q_m - Q_m) \delta q_m + \sum_{k=s-d+1}^{s} (T q_k - Q_k) \sum_{m=1}^{s-d} h_{km} \delta q_m = 0,$$

или

$$\sum_{m=1}^{s-d} \left[T q_m - Q_m + \sum_{k=s-d+1}^{s} (T q_k - Q_k) h_{km} \right] \delta q_m = 0.$$

В силу независимости $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{s-d}$ имеем

$$T q_m - Q_m + \sum_{k=s-d+1}^{s} (T q_k - Q_k) h_{km} = 0 \qquad (7.60)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s-d).$$

Это и есть искомые уравнения движения. Присоединяя к ним уравнения неголономных связей (7.58), получим полную систему уравнений для определения всех обобщенных координат.

Если коэффициенты h_{km}, кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π не зависят от $q_{s-d+1}, q_{s-d+2}, \ldots, q_s$, то уравнения (7.60) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-d+1}^{s} h_{km} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s-d).$$

Пусть T^* будет кинетической энергией системы после исключения скоростей $\dot{q}_{s-d+1}, \dot{q}_{s-d+2}, \ldots, \dot{q}_s$; тогда

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{k=s-d+1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_m},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_m} = \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-d+1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_m}.$$

Из выражения (7.59) следует, что

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_m} = h_{km}, \qquad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_m} = \sum_{r=1}^{s-d} \frac{\partial h_{kr}}{\partial q_r} \dot{q}_r.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} + \sum_{k=s-d+1}^{s} h_{km} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k},$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_m} = \frac{\partial T}{\partial q_m} + \sum_{k=s-d+1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \sum_{r=1}^{s-d} \frac{\partial h_{kr}}{\partial q_m} \dot{q}_r.$$

Теперь можно написать

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) + \sum_{k=s-d+1}^{s} h_{km} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_m}\right) - \sum_{k=s-d+1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{dh_{km}}{dt}.$$

Замечая, что

$$\frac{dh_{km}}{dt}=\sum_{r=1}^{s-d}\frac{\partial h_{km}}{\partial q_r}\dot q_r,$$

перепишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial q_m}+\sum_{k=s-d+1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\sum_{r=1}^{s-d}\left(\frac{\partial h_{kr}}{\partial q_m}-\frac{\partial h_{km}}{\partial q_r}\right)\dot q_r=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}$$

$$(m=1, 2, \ldots, s-d).$$

Эти уравнения получил С. А. Чаплыгин *), и они носят его имя. Исключая в полученных уравнениях с помощью зависимостей (7.59) скорости $\dot q_{s-d+1}$, $\dot q_{s-d+2}$, ..., $\dot q_s$, входящие в выражения $\partial T/\partial \dot q_k$, получим систему $s-d$ уравнений с $s-d$ неизвестными q_1, q_2, ..., q_{s-d}, которая интегрируется независимо от уравнений неголономных связей. Остальные координаты можно затем определить из уравнений (7.59).

Пример 59. Составить уравнения движения велосипеда, пренебрегая движением ног велосипедиста, движением педального механизма и считая колеса велосипеда абсолютно жесткими тонкими дисками **).

Будем считать велосипедиста твердым телом, жестко скрепленным с рамой. Исходя из условий задачи и рассмотрения рис. 7.4 и 7.5, велосипед можно считать системой, состоящей из четырех кинематически связанных между собой твердых тел: рамы с седоком, переднего и заднего колес и вилки переднего колеса.

На рис. 7.5 представлена схема велосипеда в вертикальном положении и при совпадении плоскости переднего колеса и рамы. Центры заднего и переднего колес соответственно обозначены буквами M_1 и M_2, точка M_0 — точка пересечения рулевой оси с перпендикуляром, опущенным на эту ось из центра M_2. Точками M_3 и M_4 обозначены соответственно положения центров масс задней части велосипеда (рама, велосипедист, заднее колесо) и передней части (вилка переднего колеса, переднее колесо). Величина $c_1 = k_2k_3\cos\lambda$, где k_2k_3 называется выносом, величина $c = a\cos\varphi + b\cos\lambda$ называется базой велосипеда, угол λ — угол между вертикалью и рулевой осью,

*) Об этих уравнениях С. А. Чаплыгин доложил на заседании физического отделения Общества любителей естествознания 25 октября 1895 г. (С. А. Чаплыгин, Исследования по динамике неголономных систем, Гостехиздат, 1949).

**) Наиболее подробное изложение теории велосипеда имеется в книге Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева «Динамика неголономных систем», «Наука», 1967, и в их статье «Устойчивость неуправляемого и управляемого велосипеда и мотоцикла», Механика твердого тела, № 2, 1967.

отрезок $MM_2 = R\sin\lambda$. В обычных конструкциях велосипеда точка M_0 лежит внутри отрезка MM_2, поэтому $c_1 > 0$; угол λ обычно положительная величина.

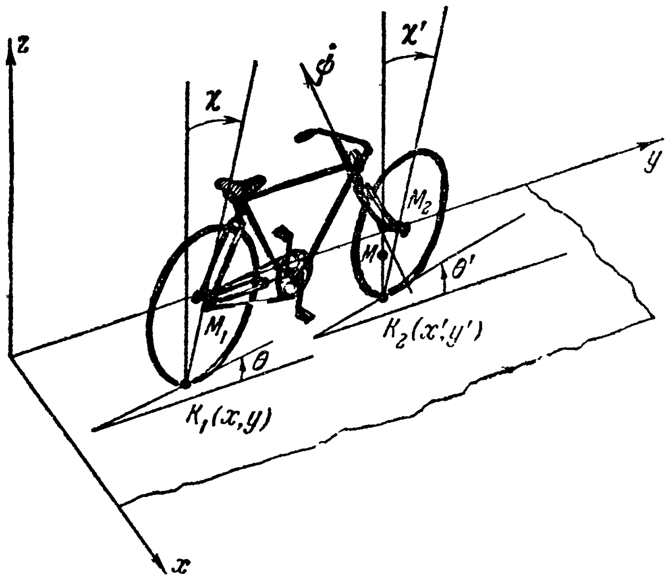

Рис. 7.4

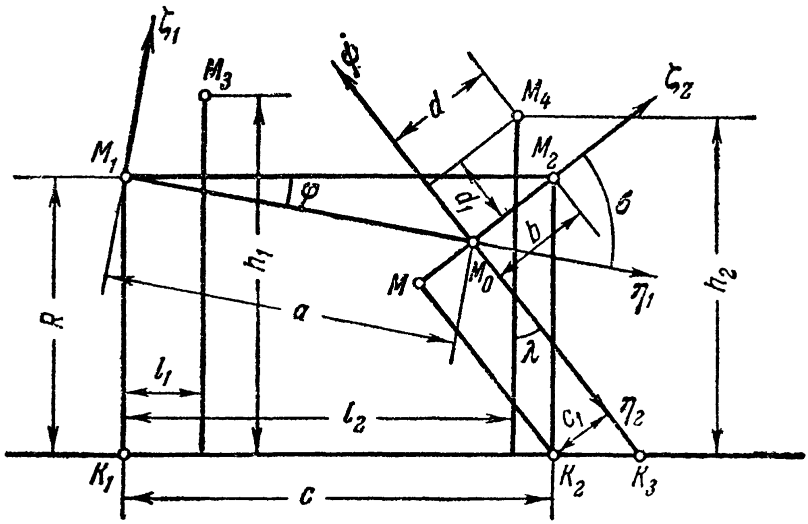

Рис. 7.5.

Предполагая, что велосипед движется по горизонтальной плоскости, примем за обобщенные координаты следующие переменные: $q_1 = \psi$ — угол поворота руля, $q_2 = \chi$ — угол поворота рамы, отсчитываемый от вертикали, $q_3 = x$, $q_4 = y$ — декартовы координаты точки k_1 соприкосновения заднего колеса с дорогой, $q_5 = \theta$ — угол между следом заднего колеса и осью y, $q_6 = \theta_1$, $q_7 = \theta_2$ — углы соб-

ственных поворотов соответственно заднего и переднего колес. Введем вспомогательные переменные x', y', θ', χ', определяющие положение переднего колеса, и найдем их связь с обобщенными координатами. В соответствии с рис. 7.6 координатами центра M_1 заднего колеса будут

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + R\sin\chi\cos\theta,\\ y_1 &= y + R\sin\chi\sin\theta,\\ z_1 &= R\cos\chi,\end{aligned}\right\} \tag{7.61}$$

где R — радиус колес велосипеда.

Найдем координаты точки M_0, являющейся точкой пересечения рулевой оси с перпендикуляром, опущенным на эту ось из центра M_2

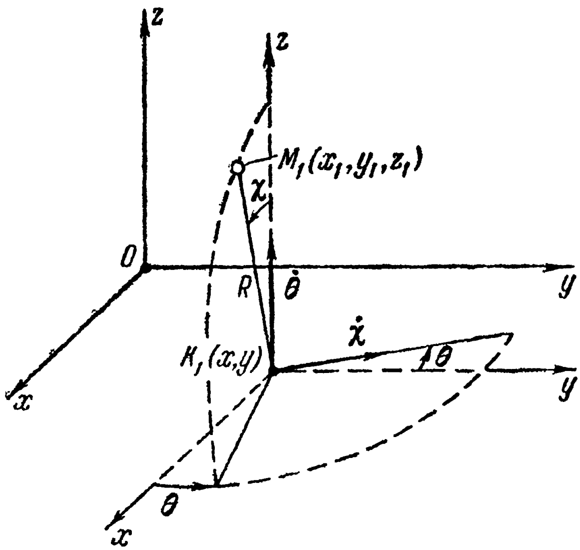

Рис. 7.6.

переднего колеса (рис. 7.5). Пусть система координат $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ имеет начало в центре заднего колеса. Ось η_1 направим от точки M_1 к точке M_0, ось ζ_1 — ей перпендикулярно в плоскости рамы, ось ξ_1 — перпендикулярно к плоскости рамы. Расположение этих осей по отношению к осям неподвижной системы координат $Oxyz$ показано на рис. 7.7. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей системы $Oxyz$, через ξ_1, η_1, ζ_1 — единичные векторы осей системы $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, а через $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ — единичные векторы вспомогательной системы координат $M_1\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1 &= \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}_1 &= -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{k}_1 &= \sin\chi\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\chi\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\chi\boldsymbol{k}.\end{aligned}\right\} \tag{7.62}$$

Так как

$$\xi_1 = \cos\chi\, \boldsymbol{i}_1 - \sin\chi\, \boldsymbol{k},$$
$$\eta_1 = \cos\varphi\, \boldsymbol{j}_1 - \sin\varphi\, \boldsymbol{k}_1,$$
$$\zeta_1 = \sin\varphi\, \boldsymbol{j}_1 + \cos\varphi\, \boldsymbol{k}_1,$$

то в соответствии с формулами (7.62) имеем

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \cos\chi\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\chi\sin\theta\, \boldsymbol{j} - \sin\chi\, \boldsymbol{k},\\ \eta_1 &= (-\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\sin\chi\cos\theta)\, \boldsymbol{i} +\\ &\quad + (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\chi\sin\theta)\, \boldsymbol{j} - \sin\varphi\cos\chi\, \boldsymbol{k},\\ \zeta_1 &= (\cos\varphi\sin\chi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)\, \boldsymbol{i} +\\ &\quad + (\cos\varphi\sin\chi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)\, \boldsymbol{j} + \cos\varphi\cos\chi\, \boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.63)$$

В системе координат $M_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ точка M_0 расположена на оси η_2 на

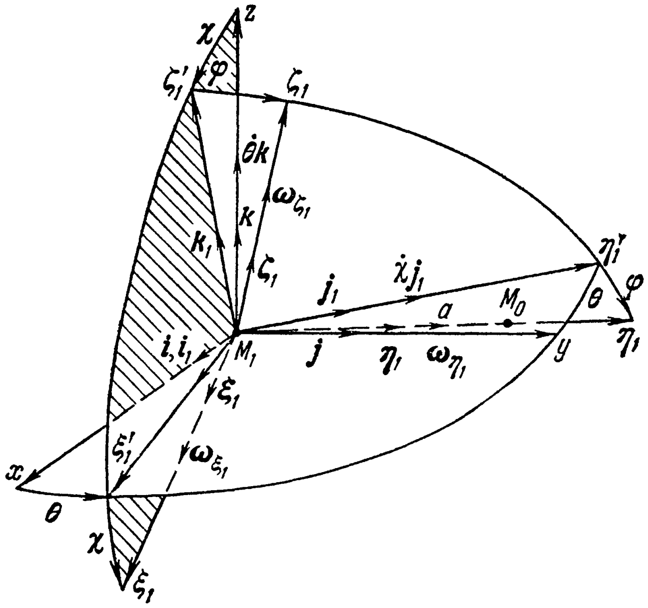

Рис. 7.7.

расстояния a от точки M_1. Следовательно, ее координатами в системе $Oxyz$ будут

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_1 - a(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\chi\cos\theta),\\ y_0 &= y_1 + a(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\chi\sin\theta),\\ z_0 &= z_1 - a\sin\varphi\cos\chi, \end{aligned}\right\} \qquad (7.64)$$

где x_1, y_1, z_1 определяются формулами (7.61).

Для нахождения координат центра M_2 переднего колеса введем систему координат $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$. Ось ζ_2 направим от точки M_0 к точ-

ке M_2, ось η_2 — по оси вращения вилки, ось ξ_2 — им перпендикулярно (рис. 7.8). Из рассмотрения рис. 7.8 следует, что единичные

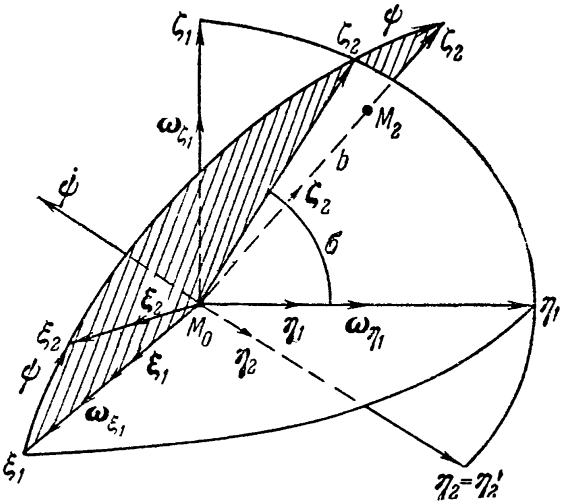

Рис. 7.8.

векторы ξ_2, η_2, ζ_2 системы $M_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ могут быть определены в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 &= \cos\psi\,\xi_1 + \sin\psi\cos\sigma\,\eta_1 + \sin\psi\sin\sigma\,\zeta_1,\\
\eta_2 &= \sin\sigma\eta_1 - \cos\sigma\zeta_1,\\
\zeta_2 &= -\sin\psi\,\xi_1 + \cos\psi\cos\sigma\,\eta_1 + \cos\psi\sin\sigma\zeta_1.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.65)$$

Косинусы углов между осями системы $Oxyz$ и $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ равны

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(x, \xi_2) = \boldsymbol{i}\cdot\xi_2 =\\
&\quad = \cos\psi\,(\boldsymbol{i}\xi_1) + \sin\psi\cos\sigma\,(\boldsymbol{i}\cdot\eta_1) + \sin\psi\sin\sigma\,(\boldsymbol{i}\cdot\zeta_1) =\\
&= \cos\psi\cos\chi\cos\theta - \sin\psi\cos\sigma\,(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\chi\cos\theta) +\\
&\quad + \sin\psi\sin\sigma\,(-\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\sin\chi\cos\theta) =\\
&= -\sin\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \cos\psi\cos\chi\cos\theta,\\
&\cos(x, \eta_2) = \boldsymbol{i}\cdot\eta_2 = \sin(\varphi-\sigma)\sin\theta - \cos(\varphi-\sigma)\sin\chi\cos\theta,\\
&\cos(x, \zeta_2) = \boldsymbol{i}\cdot\zeta_2 =\\
&= -\cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi-\sigma)] - \sin\psi\cos\chi\cos\theta,\\
&\cos(y, \xi_2) = \boldsymbol{j}\cdot\xi_2 =\\
&= \sin\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \cos\psi\cos\chi\sin\theta,\\
&\cos(y, \eta_2) = \boldsymbol{j}\cdot\eta_2 = -\sin(\varphi-\sigma)\cos\theta - \cos(\varphi-\sigma)\sin\chi\sin\theta,\\
&\cos(y, \zeta_2) = \boldsymbol{j}\cdot\zeta_2 =\\
&= \cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] - \sin\psi\cos\chi\sin\theta,\\
&\cos(z, \xi_2) = \boldsymbol{k}\cdot\xi_2 = -\sin\psi\cos\chi\sin(\varphi-\sigma) - \cos\psi\sin\chi,\\
&\cos(z, \eta_2) = \boldsymbol{k}\cdot\eta_2 = -\cos(\varphi-\sigma)\cos\chi,\\
&\cos(z, \zeta_2) = \boldsymbol{k}\cdot\zeta_2 = -\cos\psi\sin(\varphi-\sigma)\cos\chi + \sin\psi\sin\chi.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.66)$$

Точка M_2 в системе координат $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ имеет координаты $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = b$ (рис. 7.8); следовательно, в соответствии с формулами (7.66) имеем

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= x_0 - b\,\{\cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \\
&\qquad + \sin\psi\cos\chi\cos\theta\},\\
y_2 &= y_0 + b\,\{\cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] - \\
&\qquad - \sin\psi\cos\chi\sin\theta\},\\
z_2 &= z_0 - b\,[\cos\psi\cos\chi\sin(\varphi-\sigma) - \sin\psi\sin\chi],
\end{aligned}\right\} \quad (7.67)$$

где x_0, y_0, z_0 определяются формулами (7.64). Определим теперь координаты точки M_2 через вспомогательные переменные θ', χ', x', y'. Пусть система координат $K_2\xi'\eta'\zeta'$ имеет начало в точке касания K_2 переднего колеса с плоскостью дороги, ось η' направлена по следу переднего колеса, ось ζ' направлена к центру переднего колеса. Отметим, что ось ξ' будет параллельной оси ξ_2 (рис. 7.9). Единичные векторы осей системы $K_2\xi'\eta'\zeta'$ представим в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}' &= \cos\chi'\cos\theta'\,\boldsymbol{i} + \cos\chi'\sin\theta'\,\boldsymbol{j} - \sin\chi'\,\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{\eta}' &= -\sin\theta'\,\boldsymbol{i} + \cos\theta'\,\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{\zeta}' &= \sin\chi'\cos\theta'\,\boldsymbol{i} + \sin\chi'\sin\theta'\,\boldsymbol{j} + \cos\chi\,\boldsymbol{k},
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= x' + R\sin\chi'\cos\theta',\\
y_2 &= y' + R\sin\chi'\sin\theta',\\
z_2 &= R\cos\chi'.
\end{aligned}\right\} \quad (7.68)$$

Для нахождения связи между обобщенными координатами и вспомогательными переменными x', y', θ', χ' приравняем x_2, y_2, z_2, найденные по формулам (7.67) и (7.68), и, кроме того, учтем, что оси ξ' и ξ_2' параллельны:

$$\left.\begin{aligned}
&x' + R\sin\chi'\cos\theta' =\\
&\quad = x_0 - b\,\{\cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\sin\theta + \sin\chi\cos\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \\
&\qquad\qquad + \sin\psi\cos\chi\cos\theta\},\\
&y' + R\sin\chi'\sin\theta' =\\
&\quad = y_0 + b\,\{\cos\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] - \\
&\qquad\qquad - \sin\psi\cos\chi\sin\theta\},\\
&R\cos\chi' = z_0 - b\,[\cos\psi\sin(\varphi-\sigma)\cos\chi - \sin\psi\sin\chi],\\
&\cos\chi'\sin\theta' = \sin\psi\,[\cos(\varphi-\sigma)\cos\theta - \sin\chi\sin\theta\sin(\varphi-\sigma)] + \\
&\qquad\qquad + \cos\psi\cos\chi\sin\theta,\\
&-\sin\chi = -\sin\psi\cos\chi\sin(\varphi-\sigma) - \cos\psi\sin\chi.
\end{aligned}\right\} \quad (7.69)$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь малые отклонения от движения велосипеда вдоль оси y.

Линеаризуя *) выражения (7.69) относительно малых величин θ, θ', χ, χ', ψ, получим

$$x' = x - \theta\,[a\cos\varphi + b\cos(\varphi-\sigma)] - \psi\,[b + R\sin(\varphi-\sigma)],$$

$$y' = y + a\cos\varphi + b\cos(\varphi-\sigma),$$

$$a\sin\varphi + b\sin(\varphi-\sigma) = 0,\quad \theta' = \theta + \psi\cos(\varphi-\sigma),\quad \chi' = \chi + \psi\sin(\varphi-\sigma).$$

Отсюда вытекает, что $\varphi = \mathrm{const}$. Вводя обозначения $\lambda = \sigma - \varphi$, $c = a\cos\varphi + b\cos\lambda$, $c_1 = R\sin\lambda - b$, окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - c\theta + c_1\psi,\\ y' &= y + c,\\ \theta' &= \theta + \psi\cos\lambda,\\ \chi' &= \chi - \psi\sin\lambda. \end{aligned}\right\}\qquad (7.70)$$

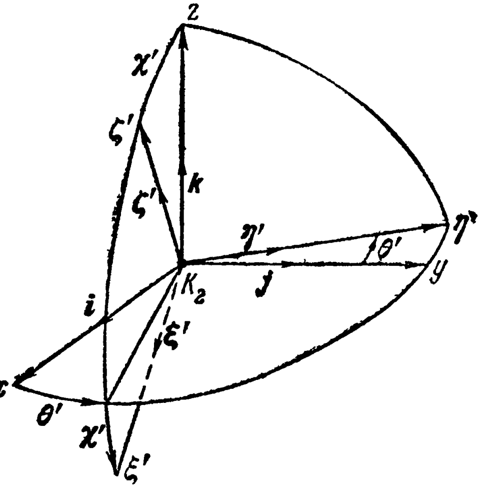

Рис. 7.9.

Рассмотрим рис. 7.5.

Запишем условия качения колес велосипеда без проскальзывания. По условию задачи колеса представляют собой абсолютно жесткие тонкие диски; тогда для заднего колеса

$$\dot{x} = -R\dot{\vartheta}_1\sin\theta,$$

$$\dot{y} = R\dot{\vartheta}_1\cos\theta \qquad (7.71)$$

и для переднего колеса

$$\dot{x}' = -R\dot{\vartheta}_2\sin\theta',\quad \dot{y}' = +R\dot{\vartheta}_2\cos\theta'. \qquad (7.72)$$

Если заднее колесо вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \dfrac{v}{R}$, где v — скорость велосипеда, то

$$\vartheta_1 - \omega t = 0.$$

Используя выражения (7.70), перепишем зависимости (7.71) и (7.72) для малых θ и θ':

$$R\dot{\vartheta}_1 = v,\quad R\dot{\vartheta}_2 = v,\quad \dot{y} = v,\quad \dot{y}' = v \qquad (7.73)$$

и

$$\dot{x} + v\theta = 0,\quad c\dot{\theta} - c_1\dot{\psi} - v\psi\cos\cdot\lambda = 0. \qquad (7.74)$$

Уравнения (7.73) являются интегрируемыми связями, а уравнения (7.74) — уравнениями неголономных связей. Таким образом, рассматриваемая система имеет две степени свободы.

*) То есть сохраняя в выражениях (7.69) члены, содержащие θ, θ', χ, χ', ψ только в первой степени.

Составим уравнения движения велосипеда, воспользовавшись уравнениями (7.60). Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии T_1 рамы с седоком и заднего колеса и кинетической энергии T_2 вилки и переднего колеса. Кинетическая энергия рамы с седоком и заднего колеса равна

$$T_1 = T_1^{\text{п}} + T_1^{\text{вр}},$$

где $T_1^{\text{п}} = \frac{1}{2} m_1 v_3^2$ — кинетическая энергия поступательного движения задней части велосипеда, m_1 — масса задней части велосипеда,

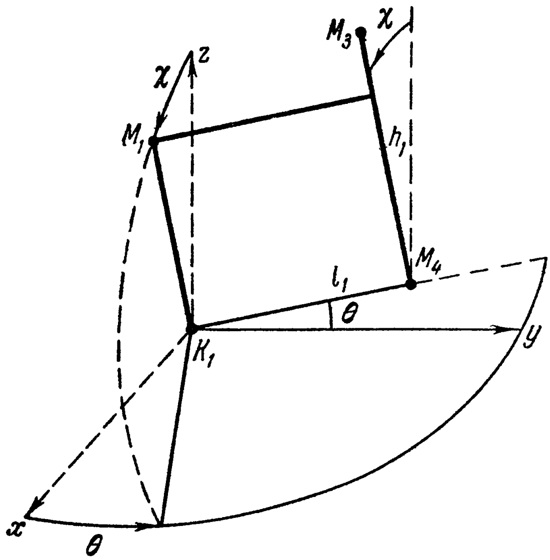

Рис. 7.10.

v_3 — скорость центра масс M_3 задней части велосипеда, $T^{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения задней части относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс велосипеда. В соответствии с рис. 7.5 и 7.10 координатами центра масс M_3 будут

$$x_3 = x - l_1 \sin\theta + h_1 \sin\chi \cos\theta,$$
$$y_3 = y + l_1 \cos\theta + h_1 \sin\chi \sin\theta,$$
$$z_3 = h_1 \cos\chi.$$

После дифференцирования получим

$$\dot{x}_3 = \dot{x} - l_1\dot{\theta}\cos\theta + h_1\dot{\chi}\cos\chi\cos\theta - h_1\dot{\theta}\sin\chi\sin\theta,$$
$$\dot{y}_3 = v - l_1\dot{\theta}\sin\theta + h_1\dot{\chi}\cos\chi\sin\theta + h_1\dot{\theta}\sin\chi\cos\theta,$$
$$\dot{z}_3 = -h_1\dot{\chi}\sin\chi.$$

Отбрасывая постоянный член и сохраняя члены не выше второго порядка малости, имеем

$$v_3^2 = (\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 - 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot{\theta} + 2vh_1\theta\dot{\chi}.$$

Следовательно,

$$T_1^{\text{п}} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 - 2m_1 v (l_1\theta - h_1\chi)\,\dot{\theta} + 2vm_1h_1\theta\dot{\chi}.$$

Пусть оси $M_3x_1y_1z_1$ жестко связаны с рамой велосипеда и при $\theta = \chi = 0$ параллельны осям x, y, z. Проекции мгновенной угловой скорости задней части велосипеда на эти оси равны соответственно $-\dot{\theta}\sin\chi, \dot{\chi}, \dot{\theta}\cos\chi$. Для заднего колеса $\omega'_{x_1} = -v/r - \dot{\vartheta}\sin\chi$. Тогда с точностью до малых второго порядка и без постоянного члена

$$T_1^{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left(I_{y_1}\dot{\chi}^2 - 2I_{y_1z_1}\dot{\chi}\dot{\theta} + I_{z_1}\dot{\theta}^2\right) + I_1\frac{v}{R}\,\dot{\theta}\chi,$$

где I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1z_1}$ — соответственно момент инерции относительно оси y_1, момент инерции относительно оси z_1, центробежный момент инерции задней части велосипеда, I_1 — момент инерции заднего колеса относительно собственной оси вращения. Таким образом,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h\dot{\chi})^2 - 2v(l_1\theta - h_1\chi)\,\dot{\theta} + 2vh_1\theta\dot{\chi}\right] + \\ + \frac{1}{2}(I_{y_1}\dot{\chi}^2 - 2I_{y_1z_1}\dot{\chi}\dot{\theta} + I_{z_1}\dot{\theta}^2) + I_1\frac{v}{R}\,\dot{\theta}\chi.$$

Кинетическая энергия передней части велосипеда (рулевая вилка и переднее колесо) вычисляется по формуле

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_4^2 + T_2^{\text{вр}},$$

где m_2 — масса передней части велосипеда, v_4 — скорость центра масс передней части (точка M_4), $T_2^{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения передней части. Координаты точки M_4 в системе $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ равны $\xi_2 = 0$, $\eta_2 = -d_1$, $\zeta_2 = d$ (рис. 7.5). Используя формулы (7.66), получим

$$x_4 = x_0 - d\sin\psi\cos\chi\cos\theta + d\cos\psi(\sin\chi\cos\theta\sin\lambda - \sin\theta\cos\lambda) + \\ + d_1\sin\lambda\sin\theta + d_1\cos\lambda\sin\chi\cos\theta,$$

$$y_4 = y_0 + d\cos\psi(\cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\chi\sin\theta) - \\ - d\sin\psi\cos\chi\sin\theta - d_1\sin\lambda\cos\theta + d_1\cos\lambda\sin\chi\sin\theta,$$

$$z_4 = z_0 + d_1\cos\lambda\cos\chi + d\sin\psi\sin\chi + d\cos\psi\sin\lambda\cos\chi.$$

После дифференцирования и сохранения членов не выше второго порядка малости получим

$$\dot{x}_4 = \dot{x} + h_2\dot{\chi} + l_2\dot{\theta} - \dot{\psi}d,$$

$$\dot{y}_4 = v + (h_2\chi - l_2\theta - \psi d)\,\dot{\theta} + h_2\theta\dot{\chi} - d(\theta + \psi\cos\lambda)\,\dot{\psi},$$

$$\dot{z}_4 = -h_2\chi\dot{\chi} + d(\chi - \psi\sin\lambda)\,\dot{\psi} + \dot{\chi}\psi d,$$

где

$$h_2 = R - a \sin \varphi + d \sin \lambda + d_1 \cos \lambda,$$
$$l_2 = a \cos \varphi + d \cos \lambda - d_1 \sin \lambda.$$

Смысл величин h_2 и l_2 виден из рис. 7.5 *). Кроме того, из рассмотрения этого же рисунка видно, что между параметрами велосипеда существует зависимость

$$d = h_2 \sin \lambda - c_1 - (c - l_2) \cos \lambda.$$

При сделанных ранее предположениях о малости переменных имеем

$$\frac{1}{2} m_2 v_4^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + h_2 \dot{\chi} - l_2 \dot{\theta} - \dot{\psi} d)^2 + m_2 v (h_2 \chi - l_2 \theta - \psi d) \dot{\theta} + \\ + m_2 v h_2 \theta \dot{\chi} - m_2 v \, d (\theta + \psi \cos \lambda) \dot{\psi}.$$

Мгновенная угловая скорость передней части велосипеда без учета собственного вращения переднего колеса складывается из угловой скорости вращения вместе с рамой и угловой скорости вращения вокруг рулевой оси. Пусть оси y_2 и z_2 лежат в плоскости переднего колеса, причем ось y_2 горизонтальна. Отметим, что угловая скорость вращения вокруг рулевой оси $(\dot{\psi})$ перпендикулярна к оси x_2. Очевидно, что во введенной системе координат, имеющей начало в точке M_4, ось x_2 параллельна оси ξ_2, а ось y_2 повернута по отношению к оси η_2 на угол λ. Следовательно, проекциями абсолютной мгновенной угловой скорости передней части велосипеда на оси системы $M_4 x_2 y_2 z_2$ будут

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x_2} &= \omega_{\xi_2}, \\ \omega_{y_2} &= \omega_{\eta_2} \sin \lambda + \omega_{\zeta_2} \cos \lambda, \\ \omega_{z_2} &= -\omega_{\eta_2} \cos \lambda + \omega_{\zeta_2} \sin \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{7.75}$$

Проекции мгновенной скорости задней части велосипеда (без учета вращения заднего колеса) на оси системы $M_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$ равны (рис. 7.7)

$$\omega_{\xi_1} = -\dot{\theta} \sin \chi,$$
$$\omega_{\eta_1} = -\dot{\theta} \cos \chi \sin \varphi + \dot{\chi} \cos \varphi,$$
$$\omega_{\zeta_1} = \dot{\theta} \cos \chi \cos \varphi + \dot{\chi} \sin \varphi.$$

Переходя теперь к нахождению проекций мгновенной угловой скорости передней части велосипеда (без учета вращения переднего колеса) на оси системы $M_0 \xi_2 \eta_2 \zeta_2$, воспользуемся формулами (7.65) и

*) При вертикальном положении велосипеда величина h_2 есть расстояние от дороги до центра масс M_4 передней части велосипеда, l_2 — расстояние по горизонтали от центра заднего колеса M_1 до перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на дорогу.

учтем угловую скорость $\dot{\psi}$ (рис. 7.8). Тогда

$$\omega_{\xi_2} = -\dot{\theta}\sin\chi\cos\psi + (-\dot{\theta}\cos\chi\sin\varphi + \dot{\chi}\cos\varphi)\sin\psi\cos\chi + \\ + (\dot{\theta}\cos\chi\cos\varphi + \dot{\chi}\sin\varphi)\sin\psi\sin\sigma.$$

Линеаризуя это выражение, получим

$$\omega_{\xi_2} = \dot{\chi}\psi\cos\lambda - (\chi - \psi\sin\lambda)\dot{\theta}.$$

Аналогично найдем

$$\omega_{\eta_2} = -\dot{\psi} - \dot{\theta}\cos\lambda + \dot{\chi}\sin\lambda,$$

$$\omega_{\zeta_2} = \dot{\theta}\sin\lambda + \dot{\chi}\cos\lambda.$$

Используя теперь формулы (7.75), окончательно будем иметь

$$\omega_{x_2} = \dot{x}\psi\cos\lambda - (\chi - \psi\sin\lambda)\dot{\theta},$$

$$\omega_{y_2} = \dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda,$$

$$\omega_{z_2} = \dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda.$$

Для переднего колеса

$$\omega'_{x_2} = -\frac{v}{R} + \omega_{x_2}, \quad \omega'_{y_2} = \omega_{y_2}, \quad \omega'_{z_2} = \omega_{z_2}.$$

Обозначив через I_{y_2} и I_{z_2} моменты инерции передней части велосипеда относительно осей y_2 и z_2, через $I_{y_2z_2}$ — центробежный момент инерции, через I_2 — момент инерции переднего колеса относительно собственной оси вращения, можем записать

$$T_2^{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left[I_{y_2}(\dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda)^2 - 2I_{y_2z_2}(\dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda)(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda) + \right. \\ \left. + I_{z_2}(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda)^2\right] - I_2\frac{v}{R}\dot{\chi}\psi\cos\lambda + I_2\frac{v}{R}\dot{\theta}(\chi - \psi\sin\lambda).$$

Итак, кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}m_1\left[(\dot{x} - l_1\dot{\theta} + h_1\dot{\chi})^2 + 2v(l_1\theta - h_1\chi)\dot{\theta} + 2vh_1\theta\dot{\chi}\right] + \\ + \frac{1}{2}(I_{y_1}\dot{\chi}^2 - 2I_{y_1z_1}\dot{\chi}\dot{\theta} + I_{z_1}\dot{\theta}^2) + I_1\frac{v}{R}\dot{\theta}\chi + \\ + \frac{1}{2}m_2(\dot{\chi} + h_2\dot{\chi} - l_2\dot{\theta} - d\dot{\psi})^2 + m_2v(h_2\chi - l_2\theta - \psi d)\dot{\theta} + \\ + m_2vh_2\theta\dot{\chi} - m_2vd(\theta + \psi\cos\lambda)\dot{\psi} + \\ + \frac{1}{2}\left[I_{y_2}(\dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda)^2 - 2I_{y_2z_2}(\dot{\chi} - \dot{\psi}\sin\lambda)(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda) + \right. \\ \left. + I_{z_2}(\dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\lambda)^2\right] - I_2\frac{v}{R}\dot{\chi}\psi\cos\lambda + I_2\frac{v}{R}\dot{\theta}(\chi - \psi\sin\lambda). \quad (7.76)$$

Потенциальная энергия велосипеда

$$\Pi = m_1gz_3 + m_2gz_4 = m_1gh_1\cos\chi + m_2g\,[(R - a\cos\varphi)\cos\chi + d_1\cos\lambda\cos\chi + d\sin\psi\sin\chi + d\cos\psi\sin\lambda\cos\chi] \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}g\,[(m_1h_1 + m_2h_2)\chi^2 + d\sin\lambda m_2\psi^2 - 2m_2\,d\psi\chi].$$

Предположим, что рассеивание энергии происходит только из-за вязкого трения в рулевой колонке, и, следовательно, обобщенная сила, соответствующая этому трению, будет (см. § 3.7)

$$Q_\psi^{\text{тр}} = -\,n\dot\psi.$$

Найдем обобщенные силы:

$$\left.\begin{aligned}
Q_\psi &= -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} - n\dot\psi = +\,m_2gd\sin\lambda\psi - m_2gd\chi - n\dot\psi,\\
Q_\chi &= -\frac{\partial\Pi}{\partial\chi} = +\,(m_1h_1 + m_2h_2)\,g\chi - m_2gd\psi,\\
Q_x &= -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 0,\\
Q_\theta &= -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(7.77)$$

Для рассматриваемого случая уравнения (7.60) принимают вид

$$T_\psi - Q_\psi + (T_x - Q_x)\,h_{41} + (T_\theta - Q_\theta)\,h_{51} = 0,$$

$$T_\chi - Q_\chi + (T_x - Q_x)\,h_{42} + (T_\theta - Q_\theta)\,h_{52} = 0.$$

На основании уравнений неголономных связей (7.74) имеем

$$\delta x = 0,\quad \delta\theta = \frac{c_1}{c}\,\delta\psi,$$

и уравнениями движения будут

$$\left.\begin{aligned}
c\,(T_\psi - Q_\psi) + c_1T_\theta &= 0,\\
T_\chi - Q_\chi &= 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(7.78)$$

Вычислим операторы T_ψ, T_χ и T_θ:

$$\left.\begin{aligned}
T_\psi &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = -\,m_2\,d\ddot x + I_4\ddot\theta - I_3\ddot\chi + I\ddot\psi + \\
&\qquad + I_2\frac{v}{R}\cos\lambda\dot\chi + I_2\frac{v}{R}\sin\lambda\dot\theta,\\
T_\chi &= h\ddot x - I_{12}\ddot\theta - \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\,\dot\theta + I_{11}\ddot\chi - I_2\frac{v}{R}\cos\lambda\dot\psi - I_3\ddot\psi,\\
T_\theta &= -\,l\ddot x + I_{22}\ddot\theta - I_{12}\ddot\chi + I_4\ddot\psi + \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\,\dot\chi - I_2\frac{v}{R}\sin\lambda\dot\psi
\end{aligned}\right\}\qquad(7.79)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&l = m_1 l_1 + m_2 l_2, \quad h = m_1 h_1 + m_2 h_2,\\
&I_{11} = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + I_{y_1} + I_{y_2}, \quad I_{22} = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_{z_1} + I_{z_2},\\
&I_{12} = m_1 h_1 l_1 + I_{y_1 z_1} + m_2 h_2 l_2 + I_{y_2 z_2},\\
&I_3 = m_2 h_2 d + I_{y_1} \sin\lambda + I_{y_2 z_2} \cos\lambda,\\
&I_4 = m_2 l_2 d + I_{y_2 z_2} \sin\lambda + I_{z_2} \cos\lambda,\\
&I = m_2 d^2 + I_{y'} \sin^2\lambda + I_{y_2 z_2} \sin 2\lambda + I_{z_2} \cos^2\lambda.
\end{aligned}\right\} \tag{7.80}$$

Используя выражения (7.77) и (7.79), составим теперь уравнения (7.78) движения велосипеда:

$$-(m_2 cd + c_1 l)\ddot{x} + (cI_4 + c_1 I_{22})\ddot{\theta} - (cI_3 + c_1 I_{12})\ddot{\chi} + \\
+ (cI + c_1 I_4)\ddot{\psi} + \frac{v}{R}[cI_2 \cos\lambda + c_1(I_1 + I_2)]\dot{\chi} + \\
+ cI_2 \frac{v}{R}\sin\lambda\dot{\theta} - c_1 I_2 \frac{v}{R}\sin\lambda\dot{\psi} - cm_2 gd \sin\lambda\psi + cm_2 g\, d\chi + cn\dot{\psi} = 0,$$

$$h\ddot{x} - I_{12}\ddot{\theta} - \frac{v}{R}(I_1 + I_2)\dot{\theta} + I_{11}\ddot{\chi} - I_3\ddot{\psi} - I_2 \frac{v}{R}\cos\lambda\dot{\psi} - hg\chi + m_2 g\, d\psi = 0.$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения неголономных связей (7.74):

$$\dot{x} + v\theta = 0, \quad c\dot{\theta} = c_1\dot{\psi} + v\psi\cos\lambda.$$

После исключения x и θ при помощи уравнений неголономных связей получим

$$\left.\begin{aligned}
a_0\ddot{\chi} - a_1\chi - a_2\ddot{\psi} - va_3\dot{\psi} + (a_4 - v^2 a_5)\psi = 0,\\
b_0\ddot{\psi} + vb_1\dot{\psi} + (b_2 v^2 - b_3)\psi - b_4\ddot{\chi} + vb_5\dot{\chi} + b_6\chi = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{7.81}$$

где

$$a_0 = cJ_{11}, \quad a_1 = chg, \quad a_2 = c_1 J_{12} + cJ_3,$$

$$a_3 = c_1\left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right) + \left(I_{12} + c\frac{I_2}{R}\right)\cos\lambda,$$

$$a_4 = cm_2 gd, \quad a_5 = \left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right)\cos\lambda,$$

$$b_0 = cI + 2c_1 I_4 + \frac{c_1^2}{c} I_{22},$$

$$b_1 = I_4\cos\lambda + c\delta_1 + c_1\left(m_2 d + \frac{I_{22}}{c}\cos\lambda\right) + \frac{c_1^2 l}{c},$$

$$b_2 = \left(m_2 d + \frac{I_2}{R}\sin\lambda + \frac{c_1 l}{c}\right)\cos\lambda, \quad b_3 = cm_2 gd\sin\lambda,$$

$$b_4 = cI_3 + c_1 I_4, \quad b_5 = c\frac{I_2}{R}\cos\lambda + \frac{c_1}{R}(I_1 + I_2), \quad b_6 = cm_2 gd,$$

$$\delta_1 = \frac{n}{v}.$$

Система уравнений (7.81) представляет собой линеаризованные уравнения движения неуправляемого велосипеда с жесткими колесами.

Рассмотрим простейшую модель велосипеда, которая получается при условии, что ось руля вертикальна, проходит через центр переднего колеса и является главной осью инерции передней части велосипеда.

В этом случае

$$c_1 = d = \lambda = I_{y_2 z_2} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (7.80)

$$I_3 = 0, \quad I_4 = I_{z_2}, \quad I = I_{z_2}, \quad I_{12} = m_1 h_1 l_1 + I_{y_1 z_1} + m_2 h_2 l_2.$$

Уравнения (7.81) при этом примут вид

$$cI_1\ddot{\chi} - chg\chi - v\left(I_{12} + c\frac{I_2}{R}\right)\dot{\psi} - v^2\left(h + \frac{I_1}{R} + \frac{I_2}{R}\right)\psi = 0,$$

$$cI_{z'}\ddot{\psi} + (I_{z'} + c\delta_1)\, v\psi + c\frac{I_2}{R}v\dot{\chi} = 0.$$

Пусть l_0 и h_0 — координаты центра масс всего велосипеда. Положим, что $I_1 = mh_0^2$, $I_{12} = mh_0 l_0$, $h = mh_0$, $m = m_1 + m_2$, и пренебрежем моментами инерции I_1 и I_2 колес по сравнению с величиной mh_0R; тогда первое уравнение

$$\ddot{\chi} = \frac{l_0 v}{h_0 c}\dot{\psi} + \frac{g}{h_0}\left(\chi + \frac{v^2}{cg}\psi\right)$$

описывает движение велосипеда и соответствует элементарной теории велосипеда *). Из этого уравнения вытекает, что если велосипед начинает падать вправо, то для остановки падения нужно создать $\ddot{\chi} < 0$, а для этого нужно, чтобы $\dot{\psi} < 0$, т. е. руль следует повернуть в сторону падения. Так как $\dot{\psi} < 0$, то это приведет к возникновению $\psi < 0$, что увеличит абсолютное значение $\ddot{\chi}$.

Исследование устойчивости велосипеда в более общем случае изложено в работах Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, указанных на стр. 199.

*) Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика, ч. III, ГТТИ, 1934, стр. 188.

ГЛАВА 8

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 8.1. Пути прямой и окольный. Действие по Гамильтону

Предположим, что рассматриваемая консервативная материальная система подчинена голономным идеальным связям. Пусть действительное движение системы описывается обобщенными координатами

$$q_1(t), \quad q_2(t), \ \ldots, \ q_s(t). \tag{8.1}$$

Для наглядности введем в рассмотрение понятие «изображающей» точки. Пусть система имеет две степени свободы, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ суть обобщенные координаты, описывающие ее движение. Очевидно, что каждому положению системы, определяемому координатами q_1 и q_2, на плоскости q_1q_2 будет соответствовать точка с координатами q_1, q_2. При изменении q_1 и q_2 точка на плоскости q_1q_2 будет менять свое положение. Эту точку называют *изображающей* точкой. При рассмотрении системы с s степенями свободы под изображающей точкой будем понимать точку в s-мерном пространстве с координатами q_1, q_2, $\ldots$, q_s.

Под *прямым путем* изображающей точки понимается геометрическое место ее действительных положений в ее s-мерном пространстве. *Окольным путем* называется геометрическое место воображаемых смещенных положений прямого пути, причем смещения в начальный и конечный моменты должны равняться нулю. В соответствии с условиями (8.1) прямой путь параметрически изображается уравнениями

$$q_m = q_m(t) \qquad (m = 1, \ 2, \ \ldots, \ s). \tag{8.2}$$

Окольные пути параметрически изображаются уравнениями

$$q_m^*(t) = q_m(t) + \delta q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

где вариации обобщенных координат δq_m, вследствие независимости обобщенных координат q_m, представляют собой любые бесконечно малые дифференцируемые функции, не нарушающие связей, подчиненные условиям:

$$\left.\begin{aligned} (\delta q_m)_{t=t_1} &= 0, \\ (\delta q_m)_{t=t_2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

где t_1 и t_2 — фиксированные, но произвольно выбираемые моменты времени. Условия (8.3) называются условиями закрепленности концов окольных путей. Из выражений

$$q_m^*(t) = q_m(t) + \delta q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s)$$

следует, что

$$\delta q_m = q_m^*(t) - q_m(t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

т. е. вариации обобщенных координат представляют собой изменения обобщенных координат при фиксированном времени t. Такие вариации называются «изохронными».

Действием по Гамильтону за промежуток времени (t_1, t_2) называется величина S, определяемая выражением

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \tag{8.4}$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа. Таким образом, действие по Гамильтону представляет собой функционал. Значение S определяется выбором s функций времени $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$, так как L является функцией $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s, t$. На прямом пути, когда $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_s, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$ соответствуют действительному движению, действие S имеет определенное числовое значение.

§ 8.2. Принцип Гамильтона — Остроградского *)

Принцип Гамильтона — Остроградского утверждает, что вариация действия по Гамильтону

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

(конечного «импульса лагранжевой функции»), на прямом пути по сравнению с любым окольным путем равна нулю, т. е.

$$\delta S = 0. \tag{8.5}$$

При этом действие S имеет стационарное значение на прямом пути **).

Покажем, как исходя из принципа Гамильтона — Остроградского, получить уравнения Лагранжа второго рода. Пусть $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_s(t)$ — обобщенные координаты, соответствующие прямому пути консервативной голономной механической системы. Рассмотрим окольный путь, определяемый функциями $q_1+\delta q_1$, $q_2+\delta q_2$, ..., $q_s+\delta q_s$. Тогда, с точностью до членов первого порядка малости по сравнению с δq_m и $\delta \dot{q}_m$, будем иметь

$$\delta L = L(q_m + \delta q_m, \dot{q}_m + \delta \dot{q}_m, t) - L(q_m, \dot{q}_m, t) =$$
$$= \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m}\delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\delta \dot{q}_m. \tag{8.6}$$

Следовательно,

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt,$$

*) Этот принцип сформулирован Гамильтоном в 1835 г. для стационарных связей. Независимо от него для общего случая нестационарных связей этот принцип был сформулирован и обоснован М. В. Остроградским в 1848 г.

**) Говорят, что функционал вида

$$\int_{x_1}^{x_2} f\left[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x), x\right] dx$$

имеет стационарное значение при функциях $y_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$, если вариация этого функционала, обусловленная заданием вариаций δy_m с точностью до величин первого порядка малости относительно δy_m, равна нулю.

где

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_m,\dot q_m,t)\,dt.$$

Отсюда следует:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}=\delta L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}\delta q_m+\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\delta\dot q_m\right)\right]dt.$$

Используя свойство операторов $\delta\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\delta q$ (стр. 87), перепишем последнее выражение в виде

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}\delta q_m+\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\frac{d}{dt}(\delta q_m)\right)\right]dt$$

или

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{m=1}^{s}\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}+\frac{\partial L}{\partial q_m}\right)\delta q_m\right]dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{m=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\delta q_m\right)dt.$$

В силу условия закрепленности концов (8.3) второй интеграл в последнем выражении равен нулю. В самом деле,

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{m=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\delta q_m\right)dt=\sum_{m=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\delta q_m\right)dt=$$
$$=\sum_{m=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\delta q_m\Big|_{t_1}^{t_2}=0.$$

Таким образом,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_m}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\right)\delta q_m\,dt.$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского $\delta S = 0$. Значит,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m \, dt = 0. \qquad (8.7)$$

Вследствие произвольности интервала интегрирования

$$\sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = 0.$$

Так как вариации координат независимы, то получаем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (8.8)$$

Покажем теперь, как исходя из уравнений Лагранжа второго рода, можно прийти к принципу Гамильтона — Остроградского. Умножая каждое из уравнений (8.8) на соответствующую вариацию δq_m и складывая между собой полученные выражения, найдем, что

$$\sum_{m=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} \right) \delta q_m = 0,$$

или

$$\sum_{m=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m \right) = 0. \qquad (8.9)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \frac{d}{dt} \delta q_m = \\ = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m,$$

то выражение (8.9) можно переписать в виде

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) - \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m \right) = 0.$$

В соответствии с соотношением (8.6)

$$\delta L = \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m \right).$$

Следовательно,

$$\delta L - \sum_{m=1}^{s} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) = 0.$$

Умножая это выражение на dt и интегрируя в пределах от t_1 до t_2 (t_1, t_2 — фиксированные, но произвольные моменты времени), будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt - \sum_{m=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \right) = \\ = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt - \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0,$$

так как $(\delta q_m)_{t=t_1} = 0$ и $(\delta q_m)_{t=t_2} = 0$, а время не варьируется. Таким образом,

$$\delta S = 0.$$

Итак, показано, что из принципа Гамильтона — Остроградского можно получить уравнения движения, а из уравнений движения — принцип Гамильтона — Остроградского. Из этого следует, что этот принцип может быть положен в основу механики голономных консервативных систем *).

Из принципа Гамильтона — Остроградского можно получить и канонические уравнения Гамильтона. Действительно, из выражения (5.6) для функции Гамильтона

$$H = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - L$$

*) Распространение принципа Гамильтона — Остроградского на неголономные системы рассмотрено, например, в монографиях А. И. Лурье «Аналитическая механика», Физматгиз, 1961, и Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, Динамика неголономных систем, «Наука», 1967.

определяем

$$L = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H,$$

где $H = H(q_m, p_m)$. Из условия (8.5) следует:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta \left(\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H \right) = 0. \tag{8.10}$$

Так как

$$\delta H = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_m} \delta p_m,$$

а

$$\delta \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m + \sum_{m=1}^{s} p_m \delta \dot{q}_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m + \sum_{m=1}^{s} p_m \frac{d}{dt} \delta q_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \dot{q}_m \delta p_m + \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m - \sum_{m=1}^{s} \dot{p}_m \delta q_m,$$

то соотношение (8.10) примет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{m=1}^{s} \left[\left(\dot{q}_m - \frac{\partial H}{\partial p_m} \right) \delta p_m - \left(\dot{p}_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} \right) \delta q_m \right] = 0, \tag{8.11}$$

ибо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m \right) = \sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

в силу закрепленности концов окольных путей. Несмотря на то, что q_m и p_m входят в функцию H как независимые переменные, при вычислении интеграла (8.11) нельзя считать δq_m и δp_m независимыми, так как они связаны временной зависимостью. Если взять частную

производную по p_m от функции Гамильтона

$$H = \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - L(q_m, \dot{q}_m, t),$$

то получим

$$\frac{\partial H}{\partial p_m} = \dot{q}_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Следовательно, первая круглая скобка в выражении (8.11) тождественно равна нулю *). Вследствие произвольности интервала интегрирования и независимости δq_m имеем, что и

$$\dot{p}_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Итак, получаем

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Принцип Гамильтона — Остроградского дает только необходимое условие стационарности действия по Гамильтону на прямом пути. Для решения вопроса о характере экстремума следует определить знак второй вариации $\delta^2 S$. Значение действия по Гамильтону на прямом пути по сравнению с окольными будет минимальным, если $\delta^2 S > 0$. Если промежуток времени $t_2 - t_1$ выбрать достаточно малым, то условие $\delta^2 S > 0$ будет выполнено и действие по Гамильтону на прямом пути будет минимальным по сравнению с окольными путями **).

Докажем теперь, что обратимое преобразование (5.32) будет каноническим, если выражение (5.49)

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - H = \sum_{m=1}^{s} p'_m \dot{q}'_m - H' + \frac{dV}{dt}$$

---

*) А. Зоммерфельд, Механика, ИЛ, 1947.

**) Г. К. Якоби, Лекции по аналитической механике, ОНТИ, 1936. Д. К. Бобылев, О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия. Приложение к XI тому Записок Российской Академии наук, 1889.

Определение характера экстремума пояснено в примере 60.

будет тождественно удовлетворяться. Перепишем выражение (8.10) в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{m=1}^{s} p_m \, dq_m - H \, dt \right) = 0.$$

Из этого выражения, как только что было показано, получаются уравнения Гамильтона для переменных q_m и p_m. Для того чтобы обратимое преобразование (5.32) было каноническим, т. е. чтобы новые переменные q'_m, p'_m удовлетворяли уравнениям Гамильтона, должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{m=1}^{s} p'_m \, dq'_m - H' \, dt \right) = 0.$$

Оба последних равенства должны удовлетворяться одновременно. Следовательно, их подынтегральные выражения могут отличаться друг от друга не более чем на дифференциал от какой-либо функции V, так как

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dV = \delta \left[V(t_2) - V(t_1) \right] = 0.$$

Следовательно, должно выполняться условие

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \, dq_m - H \, dt = \sum_{m=1}^{s} p'_m \, dq'_m - H' \, dt + dV.$$

Рассмотрим теперь неконсервативную голономную систему. Уравнения Лагранжа второго рода для такой системы имеют вид (см. § 3.3, (3.29))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Умножая каждое из этих уравнений на соответствующую вариацию обобщенной координаты δq_m и складывая между собой полученные соотношения, будем иметь

$$\sum_{m=1}^{s} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \right) \delta q_m - \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m - Q_m \delta q_m \right] = 0. \quad (8.12)$$

Проведя вычисление

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)\delta q_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\,\delta q_m\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\,\delta \dot{q}_m$$

и принимая во внимание, что

$$\delta T = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial q_m}\,\delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\,\delta \dot{q}_m,$$

перепишем соотношение (8.12) в виде

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\,\delta q_m\right) - \delta T - \sum_{m=1}^{s} Q_m\,\delta q_m = 0.$$

Умножая это выражение на dt и интегрируя в пределах от t_1 до t_2, получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T + \sum_{m=1}^{s} Q_m\,\delta q_m\right)dt = 0, \qquad (8.13)$$

так как в силу закрепленности концов окольных путей

$$\sum_{m=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\,\delta q_m\right) = 0.$$

Результат (8.13) также называют принципом Гамильтона — Остроградского, однако следует иметь в виду, что это уже не вариационная формулировка, а лишь утверждение, что этот интеграл равен нулю. В самом деле, выделяя в обобщенных силах консервативные силы

$$Q_m = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} + Q'_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

где Π — потенциальная энергия, а Q'_m — обобщенная сила, происходящая от неконсервативных сил, и вспоминая, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_m} \equiv 0,$$

можем выражение (8.13) переписать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T - \delta\Pi + \sum_{m=1}^{s} Q'_m\,\delta q_m\right)dt = 0,$$

где

$$\delta\Pi = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_m}\,\delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot q_m}\,\delta \dot q_m.$$

Но так как $L = T - \Pi$ и время не варьируется, то

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt + \sum_{m=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} Q'_m\,\delta q_m\,dt = 0. \qquad (8.14)$$

Вводя теперь величину $\delta S'$, можем записать

$$\delta S' = \delta S + \sum_{m=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} Q'_m\,\delta q_m\,dt = 0. \qquad (8.15)$$

Результат (8.15) утверждает только то, что величина $\delta S'$ на прямом пути по сравнению с окольными равна нулю. Самого же функционала S' не существует.

Пример 60. Рассмотрим движение по инерции материальной точки по гладкой поверхности.

Принимая $\Pi = 0$, имеем $L = \frac{mv^2}{2} = \text{const}$. Действие по Гамильтону имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{mv^2}{2}(t_2 - t_1).$$

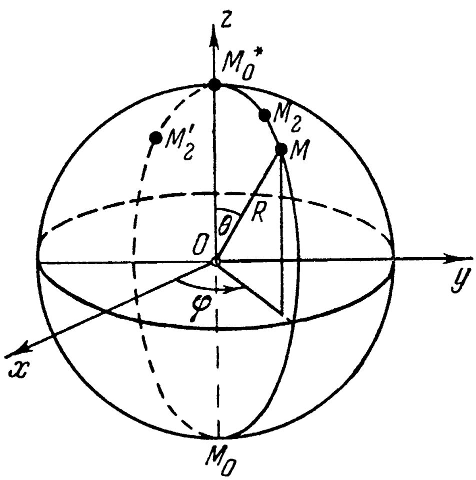

Рис. 8.1.

Согласно принципу Гамильтона при движении точки по прямому пути между начальным и конечным положениями точки действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с окольными путями при условии, что сравниваемые движения происходят за один и тот же промежуток времени $t_2 - t_1$. Следовательно, для действительного движения

$$\delta S = (t_2 - t_1)\,\delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$$

и

$$\delta(v^2) = 0.$$

Для выяснения характера экстремума рассмотрим частный случай — движение точки по гладкой сфере радиуса R (рис. 8.1). Приняв за обобщенные координаты $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, найдем

$$L = T = \frac{R^2}{2} m (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Для прямого пути выполняются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0.$$

Отсюда $\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0$, $\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} = c$ (c — постоянная).

Пусть в начальный момент $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\dot{\varphi} = 0$. Тогда $\varphi = \mathrm{const}$ и $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, т. е. движение будет происходить по меридиану (например, по меридиану $M_0M_0^*$) (рис. 8.1). Скорость материальной точки равна $v^2 = R^2\dot{\theta}_0^2$. Из этого следует, что движение по прямому пути представляет собой равномерное движение по дуге большого круга.

Если расстояние между начальной точкой M_0 и конечной точкой M_2 (рис. 8.1) будет меньше πR, то любой окольный путь между этими точками будет больше, чем дуга большого круга M_0M_2. А так как движение по окольному пути происходит за тот же промежуток времени, что и по прямому, то скорость движения по прямому пути будет минимальной. Если же дуга M_0M_2 будет больше πR, то наименьшее значение действия по Гамильтону будет достигаться по дополнительной кратчайшей дуге M_0M_2'.

Таким образом, скорость точки M_2 будет минимальной до тех пор, пока она не достигнет точки M_0^*, диаметрально противоположной точке M_0. Точка M_0^* называется *сопряженным кинематическим фокусом* точки M_0 *).

§ 8.3. Неизохронное варьирование

При сравнении прямого пути и окольных мы сопоставляли функции $q_m(t)$ и $q_m^*(t) = q_m(t) + \delta q_m$ для одного и того же момента времени t. Геометрически это представлено на рис. 8.2. На этом рисунке изображены функции $q_m(t)$ и $q_m^*(t)$. Точки M_1 и M_2, лежащие на одной вертикали, сопоставляются друг с другом в один и тот же момент времени.

---

*) Можно доказать, что и в общем случае действие по прямому пути имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на прямом пути нет сопряженного для начальной точки кинематического фокуса.

Рассмотрим теперь момент времени $t+\Delta t$. Точка M_3 получается из точки M_1 благодаря действительному движению в промежутке времени от t до $t+\Delta t$. Соответствующее этой точке значение функции $q_m(t+\Delta t)$ сопоставляется со значением функции в точке M_4 $q_m^*(t+\Delta t)=$ $=q_m(t+\Delta t)+\delta q_m(t+\Delta t)$. Сопоставление опять-таки происходит для одного момента времени $t+\Delta t$. Отметим, что с точностью до малых первого порядка малости

$$q_m^*(t+\Delta t)=q_m(t+\Delta t)+ \\ +\delta q_m(t+\Delta t)= \\ =q_m(t)+\dot q_m\Delta t+\delta q_m. \tag{8.16}$$

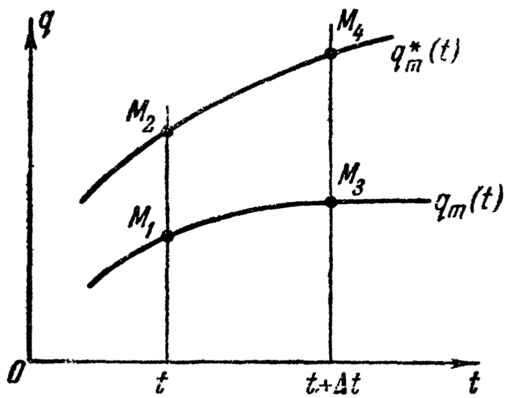

Рис. 8.2.

Приведем теперь в соответствие точки кривых $q_m(t)$ и $q_m^*(t)$ не в момент времени t, а в моменты t и $t+\Delta t$, т. е. приведем в соответствие точки M_1 и M_4. В этом случае варьируется не только координата, но и время. Эту операцию называют неизохронной вариацией и обозначают символом Δ. Для точки M_4 теперь можно написать

$$q_m^*(t+\Delta t)=q_m^*(t)+\Delta q_m. \tag{8.17}$$

Сравнивая между собой выражения (8.16) и (8.17), имеем

$$\Delta q_m=\delta q_m+\dot q_m\Delta t, \tag{8.18}$$

где Δt — бесконечно малая дифференцируемая по времени функция. Операция (8.18) может быть применена к любой функции времени. Например,

$$\Delta\dot q_m=\delta\dot q_m+\ddot q_m\Delta t. \tag{8.19}$$

Продифференцируем выражение (8.18) по времени:

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_m)=\frac{d}{dm}(\delta q_m)+\ddot q_m\Delta t+\dot q_m\frac{d}{dt}(\Delta t)=$$

$$=\delta\dot q_m+\ddot q_m\Delta t+\dot q_m\frac{d}{dt}(\Delta t),$$

и, приняв во внимание соотношение (8.19), получим

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_m) = \Delta \dot{q}_m + \dot{q}_m \frac{d}{dt}(\Delta t). \tag{8.20}$$

Отсюда следует, что перестановка операций Δ и дифференцирования по времени d/dt не имеет места. Для операции же δ, как было ранее выяснено, аналогичная перестановка существует:

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q.$$

§ 8.4. Принцип стационарного действия Лагранжа

Рассмотрим консервативную голономную систему, подчиненную стационарным связям. В такой системе справедлив закон сохранения энергии

$$T + \Pi = h. \tag{8.21}$$

Пусть $q_m(t_1)$ и $q_m(t_2)$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$ — фиксированные точки на прямом пути. Рассмотрим только такие окольные пути, на которых выполняется условие (8.21) и которые соединяются в фиксированных точках $q_m(t_1)$ и $q_m(t_2)$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$ на прямом пути. Условие (8.21) не дает возможности сопоставлять точки прямого пути с точками окольных путей в один и тот же момент времени, так как накладывает определенные ограничения на скорости точек на окольных путях (скорости должны быть такими, чтобы все время удовлетворялось соотношение (8.21)). Например, промежуток времени движения системы из фиксированного положения $q_m(t_1)$ до фиксированного положения $q_m(t_2)$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$ по окольному пути может быть не равен промежутку времени $t_2 - t_1$ движения системы по прямому пути*). Таким образом, при условии (8.21) следует применять операцию асинхронного варьирова-

*) Так, при прямолинейном движении точки при отсутствии сил $mv^2/2 = h$. Отсюда $v = dx/dt = \sqrt{2h/m}$ и $x_2 = \sqrt{2h/m}\,(t_2 - t_1) + x_1$. Значит, по любому окольному пути при одном и том же h нельзя за промежуток $t_2 - t_1$ пройти тот же путь $x_2 - x_1$.

ния. Отметим, что в силу закрепленности концов окольных путей

$$\left.\begin{aligned} \Delta q_m(t_1) = 0, \\ \Delta q_m(t_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Для рассматриваемой механической системы справедливы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{8.23}$$

где $L = T - \Pi$. Так как

$$\delta L = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta q_m + \sum_{m=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_m} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) \delta q_m \text{*)},$$

то в силу уравнений (8.23)

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m, \tag{8.24}$$

где $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ (см. § 5.1). Но $\delta L = \delta T - \delta \Pi$ и, кроме того, в соответствии с условием (8.21) $\delta T + \delta \Pi = 0$. Значит,

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \delta q_m = 2\delta T. \tag{8.25}$$

Согласно формуле (8.18) $\delta q_m = \Delta q_m - \dot{q}_m \Delta t$. Подставляя это в соотношение (8.25), получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \Delta q_m - \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m \Delta t = 2\delta T. \tag{8.26}$$

Далее имеем

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m,$$

---

*) Здесь использовано то условие, что $\delta \dot{q}_m = \frac{d}{dt} \delta q_m$.

так как $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}$. Рассматриваемая механическая система подчинена стационарным связям, следовательно (§ 3.7, формула (3.46)),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \sum_{k=1}^{s} A_{mk} \dot{q}_m \dot{q}_k$$

и

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} \dot{q}_m = 2T. \tag{8.27}$$

Учитывая выражение (8.27), перепишем соотношение (8.26) в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \Delta q_m - \frac{d}{dt} (2T \Delta t) = 2\,\delta T$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \Delta q_m = 2\,(\delta T + \dot{T}\,\Delta t) + 2T \frac{d}{dt} \Delta t.$$

На основании формулы (8.18)

$$\Delta T = \delta T + \dot{T}\,\Delta t,$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{s} p_m \Delta q_m = \Delta 2T + 2T \frac{d}{dt} \Delta t.$$

Умножая это выражение на dt, интегрируя в пределах от t_1 до t_2 и используя условия (8.22), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta (2T) + 2T \frac{d}{dt} (\Delta t) \right] dt = 0. \tag{8.28}$$

Докажем, что

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\Delta (2T) + 2T \frac{d}{dt} (\Delta t) \right] dt. \tag{8.29}$$

Так как

$$\Delta(2T)=\delta(2T)+\frac{d}{dt}(2T)\,\Delta t=\delta(2T)+\frac{d}{dt}(2T\,\Delta t)-2T\frac{d}{dt}(\Delta t),$$

то

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta(2T)\,dt+2T\frac{d}{dt}(\Delta t)\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(2T)\,dt+2T\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}. \qquad (8.30)$$

Применим теперь операцию Δ к интегралу $\int\limits_{t_1}^{t_2}2T\,\Delta t$:

$$\Delta\int_0^t 2T\,dT=\delta\int_0^t 2T\,dt+2T\,\Delta t=\int_0^t\delta(2T)\,dt+2T\,\Delta t.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\int_0^{t_2}2T\,dt=\int_0^{t_2}\delta(2T)\,dt+(2T\,\Delta t)_{t=t_2} \qquad (8.31)$$

и

$$\Delta\int_0^{t_1}2T\,dt=\int_0^{t_1}\delta(2T)\,dt+(2T\,\Delta t)_{t=t_1}. \qquad (8.32)$$

Вычитая из выражения (8.31) выражение (8.32), получим

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta(2T)\,dt+2T\,\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}. \qquad (8.33)$$

Из равенства правых частей формул (8.30) и (8.33) следует равенство левых, т. е. справедливость соотношения (8.29). Таким образом, из (8.28) и (8.29) следует:

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt=0. \qquad (8.34)$$

Величина

$$A=\int_{t_1}^{t_2}2T\,dt \qquad (8.35)$$

называется *действием по Лагранжу*. Формула (8.34) выражает принцип стационарного действия Лагранжа *): *действие по Лагранжу между двумя фиксированными положениями системы имеет стационарное значение на прямом пути, если на окольных путях сохраняется одно и то же постоянное значение полной механической энергии.*

Если взять только одну материальную точку, то согласно формуле (8.35)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} mv^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} mv\,\frac{ds}{dt}\,dt = \int_{s_1}^{s_2} mv\,ds. \tag{8.36}$$

Отметим, что условие (8.34) является условием стационарности величины A. Вопрос о том, будет ли при этом A иметь минимальное значение, требует дальнейшего исследования. Можно доказать, что для достаточно близких t_1 и t_2 действие по Лагранжу A будет минимумом. В этом случае этот принцип можно назвать *принципом наименьшего действия*.

Формула (8.34) была получена на базе уравнений Лагранжа второго рода. Но можно сделать и наоборот — принять эту формулу за исходное положение механики консервативных голономных систем со стационарными связями и получить из нее уравнения движения материальной системы **).

Рассмотрим в качестве примера движение точки по инерции по гладкой поверхности.

Так как $\Pi = 0$, то $T = \frac{mv^2}{2} = \mathrm{const}$. Действие по Лагранжу равно

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{t_1}^{t_2} mv^2\,dt = mv^2\,(t_2 - t_1).$$

---

*) Этот принцип иногда называют принципом Мопертюи, который высказал его первым, но в весьма неясной форме. Своим установлением этот принцип обязан Эйлеру и особенно Лагранжу (сборник Вариационные принципы механики, Физматгиз, 1959).

**) См., например, А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 711.

Для действительного движения

$$\Delta A = 0,$$

т. е.

$$mv^2\,\Delta t = 0.$$

Так как $mv^2/2 = h$, то v является постоянной величиной и, следовательно, $\Delta t = 0$.

По всем окольным путям движение точки происходит с постоянной скоростью, так как $h = \text{const}$. Значит, при движении по прямому пути время движения будет минимальным.

§ 8.5. Принцип стационарного действия в форме Якоби

Исключим теперь из выражения принципа стационарного действия (8.34) время t, используя интеграл энергии

$$T + \Pi = h. \tag{8.37}$$

Поскольку кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{mk}(q_1, q_2, \ldots, q_s)\,\dot q_m \dot q_k,$$

а $v_i = ds_i/dt$, то можно записать, используя (8.37), что

$$2T\,(dt)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(ds_i)^2 = \sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{mk}\,dq_m\,dq_k = 2\,(h-\Pi)\,(dt)^2.$$

Отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\,(ds_i)^2}{2\,(h-\Pi)}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{m=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} A_{mk}\,dq_m\,dq_k}{2\,(h-\Pi)}}\,. \tag{8.38}$$

Подставляя это значение dt в формулу (8.35), будем иметь

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{2\,(h-\Pi)\sum_{i=1}^{n} m_i\,(ds_i)^2} \tag{8.39}$$

или

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T\,dt = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{2\,(h-\Pi)\sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{mk}\,dq_m\,dq_k}\,. \tag{8.40}$$

Формулы (8.39) и (8.40) представляют собой выражения для действия по Лагранжу. Пределы интегрирования соответствуют начальному и конечному положению системы.

Следуя Якоби, примем обобщенную координату q_1 за независимую переменную; тогда

$$\sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{mk}\, dq_m\, dq_k = \sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} A_{mk}\frac{dq_m}{dq_1}\frac{dq_k}{dq_1}(dq_1)^2 =$$

$$= A_{11} + \sum_{m=2}^{s} A_{m1}\frac{dq_m}{dq_1} + \sum_{k=2}^{s} A_{1k}\frac{dq_k}{dq_1} + \sum_{m=2}^{s}\sum_{k=2}^{s} A_{mk}\frac{dq_m}{dq_1}\frac{dq_k}{dq_1} =$$

$$= A_{11} + 2\sum_{m=2}^{s} A_{m1}\frac{dq_m}{dq_1} + \sum_{m=2}^{s}\sum_{k=2}^{s} A_{mk}\frac{dq_m}{dq_1}\frac{dq_k}{dq_1}.$$

Вводя обозначение

$$R = 2(h - \Pi)\left(A_{11} + 2\sum_{m=2}^{s} A_{m1}\frac{dq_m}{dq_1} + \sum_{m=2}^{s}\sum_{k=2}^{s} A_{mk}\frac{dq_m}{dq_1}\frac{dq_k}{dq_1}\right), \tag{8.41}$$

перепишем выражение (8.40) в виде

$$A = \int_{(q_1^1)}^{(q_1^2)} \sqrt{R}\, dq_1, \tag{8.42}$$

где q_1^1 — значение координаты q_1 в начальном положении системы, q_1^2 — ее значение в конечном положении системы. Формула (8.42) представляет собой действие по Лагранжу в форме Якоби. Заметим, что поскольку функция $\sqrt{R}$ не зависит от времени t, то в принципе стационарного действия в форме Якоби рассматривается уже не закон движения изображающей точки по траектории, а сама фазовая траектория. Это следует из того, что равенство (8.42) имеет вид формулы (8.4), только вместо функции L стоит функция $\sqrt{R}$, а роль времени t играет координаты q_1. Поэтому аналогично тому, как из формулы (8.4) получаются уравнения Лагранжа второго

рода, так из формулы (8.42) получаются уравнения, определяющие траекторию изображающей точки, так как их решение дает зависимость обобщенных координат q_m $(m=2, 3, \ldots, s)$ от обобщенной координаты q_1:

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_k}=0 \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ s). \quad (8.43)$$

Используя формулы (8.38) и (8.41), получим время движения простой квадратурой:

$$t-t_0=\int\limits_{(q_1^1)}^{(q_1^2)} \frac{\sqrt{R}}{2(h-\Pi)}\,dq_1. \quad (8.44)$$

Общее решение задачи будет содержать $2s$ произвольных постоянных — t_0, h и $2s-2$ постоянных интегрирования, получаемых при решении уравнений (8.43) (число этих уравнений равно $s-1$).

Пример 61. Определение траектории материальной точки в однородном поле силы тяжести.

Рассматривая движение только в вертикальной плоскости, найдем траекторию, проходящую через две фиксированные точки с координатами (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Направим ось y по вертикали вверх, а ось x — по горизонтали. За обобщенные координаты примем $q_1=x$, $q_2=y$. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2}+mgy=h.$$

Так как

$$2T=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),$$

то в соответствии с выражением (8.41) имеем

$$R=2(h-mgy)(m+my'^2),$$

и, следовательно,

$$\sqrt{R}=\sqrt{2m(h-mgy)(1+y'^2)}.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial y'}=\frac{\sqrt{2m(h-mgy)}}{\sqrt{1+y'^2}}\,y', \qquad \frac{\partial\sqrt{R}}{\partial y}=-\frac{m^2g(1+y'^2)}{\sqrt{2m(h-mgy)(1+y'^2)}}.$$

Используя уравнения (8.43), найдем дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial y'}-\frac{\partial\sqrt{R}}{\partial y}=0.$$

Подставляя сюда производные от $\sqrt{R}$, получим

$$2(h-mgy)\,y''+mg\left(1+y'^2\right)=0. \tag{8.45}$$

Продифференцировав это уравнение по x, имеем

$$2(h-mgy)\,y'''=0$$

или $y'''=0$, так как $h-mgy\neq 0$. Следовательно,

$$y=ax^2+bx+c. \tag{8.46}$$

Для нахождения связи между постоянными a, b и c подставим найденное y в уравнение (8.45)

$$4a\left[h-mg\left(ax^2+bx+c\right)\right]+mg\left[1+b^2+4abx+4a^2x\right]=0.$$

Отсюда

$$c=\frac{h}{mg}+\frac{1+b^2}{4a}. \tag{8.47}$$

Семейство траекторий (8.46) представляет собой семейство парабол с вертикальной осью. Для нахождения искомой траектории следует определить a и b из уравнений

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c,\qquad y_1=ax_1^2+bx_1+c,$$

где c определяется формулой (8.47). Пусть $x_0=0$, $y_0=0$, тогда $c=0$. Из формулы (8.47) следует

$$a=-\frac{mg\left(1+b^2\right)}{4h}<0. \tag{8.48}$$

Уравнение для определения b имеет вид

$$b^2-\frac{4h}{mgx_1}b+\frac{4hy_1}{mgx_1^2}+1=0. \tag{8.49}$$

Отметим, что выбор точки (x_1, y_1) не может быть произвольным при заданном h. Из уравнения (8.49) следует, что b будет иметь действительные значения при

$$4h\left(h-mgy_1\right)>m^2g^2x_1^2, \tag{8.50}$$

т. е. во всяком случае должно быть $h>mgy_1$. При выполнении условия (8.50) a и b имеют по два значения, что соответствует факту

пересечения в точках $(0, 0)$ и (x_1, y_1) двух парабол (рис. 8.3).

Наименьшему действию соответствует парабола *1*, так как время движения по этой параболе от точки $(0, 0)$ к точке (x_1, y_1) меньше, чем по другой параболе.

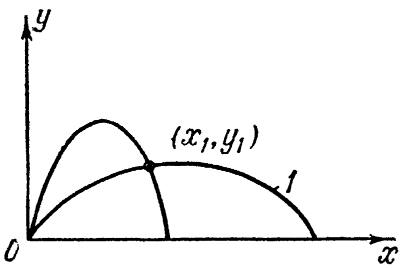

Рис. 8.3.

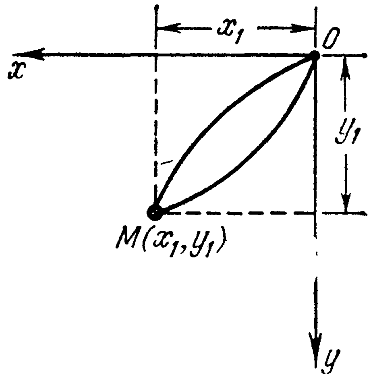

Рис. 8.4.

Пример 62. Задача о брахистохроне. В 1696 г. И. Бернулли поставил и решил следующую задачу: материальная точка, имеющая начальную скорость, равную нулю, движется под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки. Найти такую кривую, при движении по которой время движения будет наименьшим. Эта задача получила название задачи о брахистохроне и положила начало вариационному исчислению.

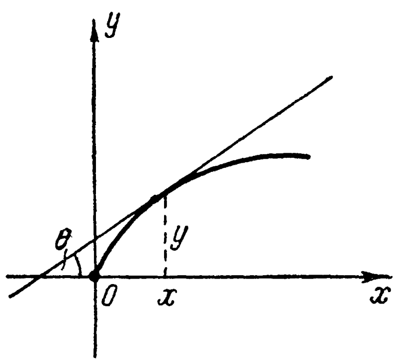

Рис. 8.5.

Пусть начальная точка будет началом координат, а вторая точка имеет координаты x_1, y_1 (рис. 8.4). Время движения по кривой (при постоянном h) определяется формулой (8.44):

$$t - t_0 = \int\limits_{(q_1^1)}^{(q_1^2)} \frac{\sqrt{R}}{2(h - \Pi)}\, dq_1.$$

Пусть в рассматриваемой задаче $q_1 = x$, $q_2 = y$. Кинетическая и потенциальная энергии выражаются формулами

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \Pi = -mgy.$$

В силу начальных условий из интеграла энергии $T + \Pi = h$ следует, что $h = 0$ и функция

$$\sqrt{R} = \sqrt{2m^2 y (1 + y'^2)}.$$

Принимая $t_0 = 0$, перепишем выражение (8.44) в виде

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx. \tag{8.51}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению минимума интеграла (8.51), т. е. к нахождению функции $y(x)$, при которой этот интеграл имеет наименьшее значение. Уравнение кривой $y = y(x)$ определяется из уравнения (см. (8.43)):

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Производя необходимые вычисления, получим

$$2yy'' + \left(1 + y'^2\right) = 0.$$

Вводя замену $u = y'$, имеем

$$\frac{2u\, du}{1+u^2} = -\frac{dy}{y}.$$

Отсюда

$$\ln(1+u^2) = \ln c_1 - \ln y$$

и

$$y = \frac{c_1}{1+y'^2},$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Так как

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}\theta, \tag{8.52}$$

где θ — угол наклона касательной к кривой $y = y(x)$ (рис. 8.5), то

$$y = \frac{c_1}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = c_1 \cos^2\theta = \frac{c_1}{2}(1 + \cos 2\theta). \tag{8.53}$$

Из соотношения (8.52) находим $dx = \operatorname{ctg}\theta\, dy$, а из формулы (8.53)

$$dy = -c_1 \sin 2\theta\, d\theta.$$

Значит,

$$dx = -2c_1 \cos^2\theta\, d\theta = -c_1(1 + \cos 2\theta)\, d\theta.$$

Отсюда

$$x = -\frac{c_1}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c_2, \tag{8.54}$$

где c_2 — постоянная интегрирования. Кривая, определяемая уравнениями (8.53) и (8.54), представляет собой дугу циклоиды.

ГЛАВА 9

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 9.1. Явный вид уравнений Лагранжа второго рода

Пусть рассматриваемая материальная система подчинена голономным связям. Тогда кинетическая энергия системы выражается формулой (3.43):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p + \sum_{p=1}^{s} B_p\dot{q}_p + T_0, \tag{9.1}$$

где T_0 и коэффициенты A_{mp}, B_p — функции обобщенных координат и времени. Находя

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m} = \sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_p + B_m,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_m} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\dot{q}_\mu\dot{q}_p + \sum_{p=1}^{s}\frac{\partial B_p}{\partial q_m}\dot{q}_p + \frac{\partial T_0}{\partial q_m}$$

и подставляя полученные выражения в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_p + B_m\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\dot{q}_\mu\dot{q}_p - \\ - \sum_{p=1}^{s}\frac{\partial B_p}{\partial q_m}\dot{q}_p - \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_m} = Q_m.$$

Отсюда

$$\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\ddot{q}_p + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mp}}{\partial q_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\right)\dot{q}_\mu \dot{q}_p + \\ + \sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial B_m}{\partial q_p} - \frac{\partial B_p}{\partial q_m}\right)\dot{q}_p + \sum_{p=1}^{s}\frac{\partial A_{mp}}{\partial t}\dot{q}_p + \frac{\partial B_m}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_m} = Q_m$$
$$(m = 1,\ 2,\ \ldots\ s),$$

или

$$\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\ddot{q}_p + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mp}}{\partial q_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\right)\dot{q}_\mu \dot{q}_p - \Gamma_m + \\ + \sum_{p=1}^{s}\frac{\partial A_{mp}}{\partial t}\dot{q}_p + \frac{\partial B_m}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_m} = Q_m \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \qquad (9.2)$$

где (стр. 79) $\Gamma_m = \sum\limits_{p=1}^{s} \gamma_{mp}\dot{q}_p$ называется *обобщенной гироскопической силой*, а

$$\gamma_{mp} = -\gamma_{pm} = \frac{\partial B_p}{\partial q_m} - \frac{\partial B_m}{\partial q_p}$$
$$(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s;\quad p = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

— *гироскопическими коэффициентами.*

Для стационарных связей получим

$$\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\ddot{q}_p + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mp}}{\partial q_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\right)\dot{q}_\mu q_p = Q_m$$
$$(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

§ 9.2. Метод вариации постоянных

Предположим, что рассматриваемая механическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\ddot{q}_p + \sum_{\mu=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mp}}{\partial q_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu p}}{\partial q_m}\right)\dot{q}_\mu \dot{q}_p + \\ + \sum_{p=1}^{s}\left(\frac{\partial B_m}{\partial q_p} - \frac{\partial B_p}{\partial q_\mu}\right)\dot{q}_p + \sum_{p=1}^{s}\frac{\partial A_{mp}}{\partial t}\dot{q}_p + \frac{\partial B_m}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_m} = \\ = Q_m + Q_m^{*}. \qquad (9.3)$$

Предположим, что система уравнений (9.3) при $Q_m^* = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$ имеет решение

$$q_m = q_m(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2s}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{9.4}$$

Метод вариации постоянных, предложенный Лагранжем *), заключается в следующем: пусть найдено решение системы (9.3) при $Q_m^* = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, s)$, т. е. определено движение системы под действием основных сил Q_m; предполагая теперь, что дополнительные силы Q_m^*, которые называются «возмущающими», достаточно малы по сравнению с основными, решение системы уравнений (9.3) ищут в форме (9.4), причем величины $c_1, c_2, \ldots, c_{2s}$ считаются уже не постоянными, а медленно меняющимися функциями времени.

Итак, будем искать решение системы уравнений (9.3) в виде решений (9.4), считая величины $c_1, c_2, \ldots, c_{2s}$ функциями времени. Дифференцируя решение (9.4) по времени, получим

$$\dot{q}_m = \frac{\partial q_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2s} \frac{\partial q_m}{\partial c_k} \dot{c}_k. \tag{9.5}$$

Так как обобщенных координат q_m столько же, сколько степеней свободы, т. е. s, а число функций c_k равно $2s$, то c_k можно связать по собственному выбору. Выберем эти функции c_k такими, чтобы первые производные от q_m имели бы такой же вид, как при постоянных c_k, т. е.

$$\dot{q}_m = \frac{\partial q_m}{\partial t} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s) \tag{9.6}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{2s} \frac{\partial q_m}{\partial c_k} \dot{c}_k = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{9.7}$$

---

*) Ж. Лагранж, Аналитическая механика, пер. с франц., Гостехиздат, 1950, стр. 412—437.

Далее находим

$$\ddot{q}_m = \frac{\partial^2 q_m}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{2s} \frac{\partial^2 q_m}{\partial t\, \partial c_k} \dot{c}_k \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (9.8)$$

Подставляя теперь выражения (9.6) и (9.8) в уравнения (9.3) и принимая во внимание, что при постоянных c_k обобщенные координаты q_m являются решениями уравнений (9.3) при $Q_m^* = 0$, имеем

$$\sum_{p=1}^{s} \sum_{k=1}^{2s} A_{mp} \frac{\partial^2 q_p}{\partial t\, \partial c_k} \dot{c}_k = Q_m^*, \quad (9.9)$$

или

$$\sum_{k=1}^{2s} \left(A_{m1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial t\, \partial c_k} + A_{m2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial t\, \partial c_k} + \ldots + A_{ms} \frac{\partial^2 q_s}{\partial t\, \partial c_k} \right) \dot{c}_k = Q_m^*. \quad (9.10)$$

Соотношения (9.7) и (9.10) представляют собой систему $2s$ уравнений относительно производных $\dot{c}_k$. Вводя обозначения

$$\alpha_{mk} = A_{m1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial t\, \partial c_k} + A_{m2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial t\, \partial c_k} + \ldots + A_{ms} \frac{\partial^2 q_s}{\partial t\, \partial c_k}, \quad (9.11)$$

$$\beta_{mk} = \frac{\partial q_m}{\partial c_k} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s; \quad k = 1, 2, \ldots, 2s), \quad (9.12)$$

перепишем соотношения (9.7) и (9.10) в виде

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2s} \alpha_{mk} \dot{c}_k &= Q_m^*, \\ \sum_{k=1}^{2s} \beta_{mk} \dot{c}_k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \quad (9.13)$$

Решая эти уравнения относительно $\dot{c}_k$, получим

$$\dot{c}_k = \frac{\sum_{m=1}^{s} (-1)^{m+k} \Delta_{mk} Q_m^*}{\Delta} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2s), \quad (9.14)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,2s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \ldots & \alpha_{s,2s} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1,2s} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2,2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \ldots & \beta_{s,2s} \end{vmatrix}, \tag{9.15}$$

а Δ_{mk} — минор определителя (9.15), соответствующий m-й строке и k-му столбцу. Соотношения (9.14) являются уравнениями для определения функций c_k и называются *уравнениями возмущенного движения*. Уравнения (9.14) представляют собой уравнения (9.3), преобразованные к новым переменным c_k, и их решение, вообще говоря, не менее трудно, чем решение уравнений (9.3). Но если возмущающие силы Q_m^* достаточно малы, то функции c_k можно считать медленно меняющимися функциями времени и применять к отысканию решений уравнений (9.14) различные приближенные методы.

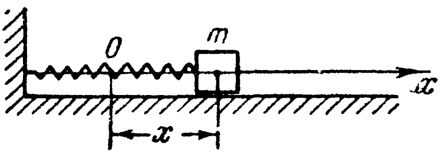

Рис. 9.1.

Пример 63. Тело массы m, прикрепленное к неподвижной преграде пружиной жесткости c (рис. 9.1), может перемещаться по горизонтальным прямолинейным направляющим. Возмущающая сила, действующая на тело, имеет вид: $F = \varepsilon f(x, \dot{x})$, где ε — малый параметр.

Поместив начало координат в точке, соответствующей положению тела при ненапряженной пружине, примем за обобщенную координату $q = x$ — отклонение тела от начала координат. Кинетическая энергия и основная обобщенная сила выражаются формулами

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \qquad Q = -cx,$$

и, следовательно, $A_{11} = m$. Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + \varepsilon f(x, \dot{x}).$$

При $\varepsilon = 0$ решением уравнения будет

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$$

где $k=\sqrt{c/m}$. Так как

$$\frac{\partial x}{\partial c_1}=\cos kt,\quad \frac{\partial x}{\partial c_2}=\sin kt,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial c_1}=-k\sin kt,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial c_2}=k\cos kt,$$

то

$$\Delta=\begin{vmatrix} -mk\sin kt & mk\cos kt \\ \cos kt & \sin kt \end{vmatrix}=-mk$$

и уравнения (9.14) примут вид

$$\dot c_1=-\frac{\varepsilon}{mk}f(x,\dot x)\sin kt,$$

$$\dot c_2=\frac{\varepsilon}{mk}f(x,\dot x)\cos kt,$$

где

$$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt,$$
$$\dot x=-c_1k\sin kt+c_2k\cos kt.$$

Вводя замену

$$c_1=a\cos\vartheta,\quad c_2=a\sin\vartheta,$$

получим

$$\dot a\cos\vartheta-a\dot\vartheta\sin\vartheta=-\frac{\varepsilon}{mk}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\sin kt,$$

$$\dot a\sin\vartheta+a\dot\vartheta\cos\vartheta=\frac{\varepsilon}{mk}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\cos kt.$$

Отсюда

$$\dot a=-\frac{\varepsilon}{mk}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\sin(kt-\vartheta),$$

$$a\dot\vartheta=\frac{\varepsilon}{mk}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\cos(kt-\vartheta).$$

Если ε достаточно мало, то a и ϑ будут медленно меняющимися функциями времени, т. е. такими, изменением которых за время $T=\frac{2\pi}{k}$ можно пренебречь. Поэтому вместо полученных уравнений можно взять «укороченные», т. е. уравнения с осредненными правыми частями *):

$$\dot a=-\frac{\varepsilon}{2\pi m}\int\limits_0^{2\pi/k}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\sin(kt-\vartheta)\,dt,$$

$$a\dot\vartheta=\frac{\varepsilon}{2\pi m}\int\limits_0^{2\pi/k}f[a\cos(kt-\vartheta),\ -ak\sin(kt-\vartheta)]\cos(kt-\vartheta)\,dt.$$

---

*) Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, гл. V, Физматгиз, 1953.

После замены $\xi = kt - \vartheta$ имеем

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi km}\int_0^{2\pi} f(a\cos\xi,\ -ak\sin\xi)\sin\xi\, d\xi,$$

$$a\dot{\vartheta} = \frac{\varepsilon}{2\pi km}\int_0^{2\pi} f(a\cos\xi,\ -ak\sin\xi)\cos\xi\, d\xi.$$

Предположим теперь, что возмущающая сила складывается из малого сопротивления движению, пропорционального скорости, и малой подталкивающей силы, действующей только по направлению движения, т. е.

$$F = -b\dot{x} + H'\operatorname{sign}\dot{x},$$

где b и H' — постоянные величины. Введем малый безразмерный параметр

$$\varepsilon = \frac{b}{mk};$$

тогда

$$F = \varepsilon(-mk\dot{x} + H\operatorname{sign}\dot{x}) = \varepsilon f(x,\ \dot{x}),$$

где

$$H = \frac{H'mk}{b}, \qquad f = -mk\dot{x} + H\operatorname{sign}\dot{x}.$$

Укороченные уравнения теперь будут иметь вид

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[ak\sin\xi + \frac{H}{mk}\operatorname{sign}(-ak\sin\xi)\right]\sin\xi\, d\xi,$$

$$a\dot{\vartheta} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[ak\sin\xi + \frac{H}{mk}\operatorname{sign}(-ak\sin\xi)\right]\cos\xi\, d\xi.$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\dot{a} = \varepsilon\left(-\frac{ak}{2} + \frac{2H}{\pi mk}\right) = \frac{2H'}{mk} - \frac{ab}{2m}, \qquad \dot{\vartheta} = 0.$$

Следовательно,

$$a = \frac{4H'}{bk} - \left(\frac{4H'}{bk} - a_0\right)e^{-\frac{b}{2m}t}, \qquad \vartheta = \vartheta_0,$$

где a_0 и ϑ_0 — начальные значения a и ϑ. Таким образом, имеем

$$x = \left[\frac{4H'}{bk} - \left(\frac{4H'}{bk} - a_0\right)e^{-\frac{b}{2m}t}\right]\cos(kt - \vartheta_0).$$

Это значит, что при $t \to \infty$ при любых начальных условиях движение будет происходить по закону

$$x = \frac{4H'}{bk} \cos(kt - \vartheta_0),$$

т. е. тело будет совершать незатухающие колебания с амплитудой, не зависящей от начальных условий. Такое движение называется автоколебательным *).

Пример 64. Рассмотрим влияние сопротивления атмосферы на движение свободной тяжелой точки в однородном гравитационном поле Земли, пренебрегая вращением Земли **). Движение точки происходит в вертикальной плоскости. Направим ось y вертикально вверх, ось x — горизонтально.

Если $q_1 = x$ и $q_2 = y$ — координаты точки, то выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

и, следовательно,

$$A_{11} = m, \quad A_{12} = 0, \quad A_{22} = m.$$

Основные обобщенные силы равны

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -mg.$$

Будем считать, что сопротивление атмосферы мало и является функцией скорости точки. Сила сопротивления направлена по касательной к траектории в сторону, противоположную скорости, и выражается формулой

$$\boldsymbol{F} = -\varepsilon \frac{\boldsymbol{v}}{v} f(v),$$

где ε — малый параметр. Отсюда следует, что возмущающие силы будут

$$Q_1^* = -\varepsilon \frac{\dot{x}}{v} f(v), \quad Q_2^* = -\varepsilon \frac{\dot{y}}{v} f(v),$$

где $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Уравнения движения точки имеют вид

$$m\ddot{x} = -\varepsilon \frac{\dot{x}}{v} f(v),$$

$$m\ddot{y} = -mg - \varepsilon \frac{\dot{y}}{v} f(v).$$

---

*) Подробнее об автоколебаниях см. А. А. Андронов, Л. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959; Н. В. Бутенин, Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, 1962; Я. Г. Пановко, Введение в теорию механических колебаний, «Наука», 1971.

**) G. Hamel, Theoretische Mechanik, Berlin, 1949, стр. 310; А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 572.

При $\varepsilon = 0$ эта система уравнений имеет решение

$$x = c_1 t + c_2,$$
$$y = c_3 t + c_4 - \frac{gt^2}{2}.$$

Составим теперь уравнения возмущенного движения (9.14). Так как

$$\frac{\partial x}{\partial c_1} = t, \quad \frac{\partial x}{\partial c_2} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial c_3} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial c_4} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial c_3} = t, \quad \frac{\partial y}{\partial c_4} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_1} = 1, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_4} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_3} = 1, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_4} = 0,$$

то определитель (9.15) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = -m^2.$$

Далее вычисляем

$$\Delta_{11} = -m, \quad \Delta_{12} = -mt, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{14} = 0,$$
$$\Delta_{21} = 0, \quad \Delta_{22} = 0, \quad \Delta_{23} = m, \quad \Delta_{24} = mt$$

и в соответствии с уравнениями (9.14) находим

$$\dot{c}_1 = -\frac{\varepsilon}{m}\frac{c_1}{v} f(v), \quad \dot{c}_2 = \frac{\varepsilon}{m}\frac{c_1}{v} f(v)\, t,$$
$$\dot{c}_3 = \frac{\varepsilon}{m}\frac{(c_3 - gt)}{v} f(v), \quad \dot{c}_4 = \frac{\varepsilon}{m}\frac{(c_3 - gt)}{v} f(v)\, t,$$

где

$$v = \sqrt{c_1 + (c_3 - gt)^2}.$$

Интегрируя последние выражения, найдем

$$c_1 = c_{10} - \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{c_1}{v} f(v)\, d\tau,$$
$$c_2 = c_{20} + \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{c_1}{v} f(v)\, \tau\, d\tau,$$
$$c_3 = c_{30} + \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{(c_3 - g\tau)}{v} f(v)\, d\tau,$$

$$c_4 = c_{40} + \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{(c_3 - g\tau)}{v} f(v)\,\tau\,d\tau,$$

где c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{40} — постоянные.

Для достаточно малых ε можно при интегрировании пренебречь изменениями c_1 и c_3 и считать их равными соответственно c_{10} и c_{20}. Тогда получим

$$c_1 = c_{10} - \frac{\varepsilon}{m} c_{10} \int_0^t \frac{f(v)}{v}\,d\tau,$$

$$c_2 = c_{20} + \frac{\varepsilon}{m} c_{10} \int_0^t \frac{f(v)}{v}\,\tau\,d\tau,$$

$$c_3 = c_{30} - \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{(c_{30} - g\tau)}{v} f(v)\,d\tau,$$

$$c_4 = c_{40} + \frac{\varepsilon}{m}\int_0^t \frac{(c_{30} - g\tau)}{v} f(v)\,\tau\,d\tau,$$

где $v = \sqrt{c_{10} + (c_{30} - g\tau)^2}$.

Подставляя эти значения c_1, c_2, c_3 и c_4 в формулы для x и y, получим закон возмущенного движения точки.

Пример 65. Возмущенное движение спутника вблизи круговой орбиты.

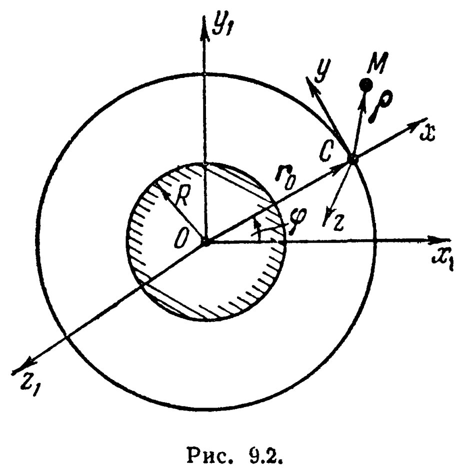

Рис. 9.2.

Пусть инерциальная система координат $Ox_1y_1z_1$ имеет начало в центре планеты. Введем подвижную систему координат $Cxyz$ (орбитальная система), начало которой движется по круговой орбите радиуса r_0; ось x направлена по радиусу r_0, ось y — по касательной к круговой орбите в сторону движения (рис. 9.2).

Положение спутника M в возмущенном движении по отношению к круговой орбите будем определять радиусом-вектором

$$\rho = xi + yj + zk,$$

где x, y и z — координаты спутника в орбитальной системе координат.

Кинетическая энергия спутника (принимаемого нами за материальную точку) определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2 + \dot z_1^2\right),$$

где

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r_0 \cos\varphi + x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\
y_1 &= r_0 \sin\varphi + x\sin\varphi + y\cos\varphi,\\
z_1 &= z, \quad \varphi = \omega t.
\end{aligned}
$$

Так как круговая скорость спутника $v_{\text{кр}} = \sqrt{\mu^2/r_0}$ *), где μ^2 — постоянная притяжения центрального поля планеты, то ω (угловая скорость орбитальной системы координат) равна

$$
\omega = \frac{v_{\text{кр}}}{r_0}
$$

и, следовательно,

$$
\mu^2 = \omega^2 r_0^3.
$$

Вычислив

$$
\begin{aligned}
\dot x_1 &= -r_0\omega\sin\varphi + (\dot x - y\omega)\cos\varphi - (x\omega + \dot y)\sin\varphi,\\
\dot y_1 &= r_0\omega_0\cos\varphi + (\dot x - y\omega)\sin\varphi + (x\omega + \dot y)\cos\varphi,\\
\dot z_1 &= \dot z,
\end{aligned}
$$

найдем кинетическую энергию

$$
T = \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 - 2y\dot x\omega + 2x\dot y\omega + y^2\omega^2 + x^2\omega^2 + {} \right.
$$

$$
\left. {} + 2r_0\omega\dot y + 2r_0\omega^2 x + r_0^2\omega^2\right).
$$

Отсюда следует, что

$$
A_{11} = m, \quad A_{22} = m, \quad A_{33} = m, \quad A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0.
$$

Центральная сила, обеспечивающая движение по круговой орбите, равна

$$
\boldsymbol F = -\frac{\mu^2 m}{r^3}\boldsymbol r,
$$

где $\boldsymbol r = \boldsymbol r_0 + \boldsymbol\rho$, а $r = \sqrt{(r_0 + x)^2 + y^2 + z^2}$. Считая x, y и z, координаты спутника в орбитальной системе, малыми по сравнению с r_0, можем приближенно принять

$$
\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\mu^2 m}{r_0^2} + \frac{2\mu^2 m}{r_0^3}x = -mr_0\omega^2 + 2m\omega^2 x,\\
F_y &= -\frac{\mu^2 m}{r_0^3}y = -m\omega^2 y,\\
F_z &= -\frac{\mu^2 m}{r_0^3}z = -m\omega^2 z.
\end{aligned}
$$

*) Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин, Курс теоретической механики, т. 2, «Наука», 1971.

Пусть дополнительная возмущающая сила будет

$$\Phi' = \Phi'_x \boldsymbol{i} + \Phi'_y \boldsymbol{j} + \Phi'_z \boldsymbol{k}.$$

Составим теперь уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x &= \Phi_x, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} \qquad &= \Phi_y, \\ \ddot{z} + \omega^2 z \qquad &= \Phi_z, \end{aligned}$$

где $\Phi_x = \dfrac{\Phi'_x}{m}$, $\Phi_y = \dfrac{\Phi'_y}{m}$, $\Phi_z = \dfrac{\Phi'_z}{m}$. При $\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0$ эта система уравнений имеет решение:

$$x = \frac{2}{\omega} c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t,$$

$$y = -3c_1 t - 2c_2 \sin \omega t + 2c_3 \cos \omega t + c_4,$$

$$z = c_5 \cos \omega t + c_6 \sin \omega t.$$

Далее находим

$$\frac{\partial x}{\partial c_1} = \frac{2}{\omega}, \quad \frac{\partial x}{\partial c_2} = \cos \omega t, \quad \frac{\partial x}{\partial c_3} = \sin \omega t, \quad \frac{\partial x}{\partial c_4} = \frac{\partial x}{\partial c_5} = \frac{\partial x}{\partial c_6} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} = -3t, \quad \frac{\partial y}{\partial c_2} = -2 \sin \omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial c_3} = 2 \cos \omega t, \quad \frac{\partial y}{\partial c_4} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial c_5} = \frac{\partial y}{\partial c_6} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial c_1} = \frac{\partial z}{\partial c_2} = \frac{\partial z}{\partial c_3} = \frac{\partial z}{\partial c_4} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial c_5} = \cos \omega t, \quad \frac{\partial z}{\partial c_6} = \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_4} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_5} = \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_6} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_2} = -\omega \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial c_3} = \omega \cos \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_1} = -3, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_2} = -2\omega \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_3} = -2\omega \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_4} = \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_5} = \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial c_6} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_3} = \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_4} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_5} = -\omega \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial c_6} = \omega \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$\alpha_{11}=0,\ \alpha_{12}=-m\omega\sin\omega t,\ \alpha_{13}=m\omega\cos\omega t,\ \alpha_{14}=\alpha_{15}=\alpha_{16}=0,$$
$$\alpha_{21}=-3m,\ \alpha_{22}=-2m\omega\cos\omega t,\ \alpha_{23}=-2m\omega\sin\omega t,\ \alpha_{24}=\alpha_{25}=\alpha_{26}=0,$$
$$\alpha_{31}=0,\ \alpha_{32}=0,\ \alpha_{33}=0,\ \alpha_{34}=0,\ \alpha_{35}=-m\omega\sin\omega t,\ \alpha_{36}=m\omega\cos\omega t,$$
$$\beta_{11}=\frac{2}{\omega},\ \beta_{12}=\cos\omega t,\ \beta_{13}=\sin\omega t,\ \beta_{14}=\beta_{15}=\beta_{16}=0,$$
$$\beta_{21}=-3t,\ \beta_{22}=-2\sin\omega t,\ \beta_{23}=2\cos\omega t,\ \beta_{24}=1,\ \beta_{25}=\beta_{26}=0,$$
$$\beta_{31}=\beta_{32}=\beta_{33}=\beta_{34}=0,\ \beta_{35}=\cos\omega t,\ \beta_{36}=\sin\omega t.$$

Вычисляя определитель (9.15), получим $\Delta=-m^3\omega^2$.

Тогда согласно выражениям (9.14) будем иметь

$$\begin{aligned}
\dot c_1&=\Phi_y\omega,\\
\dot c_2&=-\Phi_x\sin\omega t-2\Phi_y\cos\omega t,\\
\dot c_3&=\Phi_x\cos\omega t-2\Phi_y\sin\omega t,\\
\dot c_4&=-2\Phi_x+3\omega t\Phi_y,\\
\dot c_5&=-\Phi_z\sin\omega t,\\
\dot c_6&=\Phi_z\cos\omega t.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
c_1&=c_{10}+\omega\int_0^t\Phi_y\,dt,\\
c_2&=c_{20}-\int_0^t(\Phi_x\sin\omega t+2\Phi_y\cos\omega t)\,dt,\\
c_3&=c_{30}+\int_0^t(\Phi_x\cos\omega t-2\Phi_y\sin\omega t)\,dt,\\
c_4&=c_{40}+\int_0^t(3\omega t\Phi_y-2\Phi_x)\,dt,\\
c_5&=c_{50}-\int_0^t\Phi_z\sin\omega t\,dt,\\
c_6&=c_{60}+\int_0^t\Phi_z\cos\omega t\,dt,
\end{aligned}$$

где c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{40}, c_{50}, c_{60} — постоянные величины. С помощью полученных формул при конкретно заданной силе можно определить возмущенное движение точки.

§ 9.3. Метод вариации постоянных при использовании уравнений Гамильтона Канонические уравнения возмущенного движения

Предположим, что движение рассматриваемой динамической системы описывается каноническими уравнениями

$$\dot{q}_m = \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_m} \tag{9.16}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s),$$

где H — функция Гамильтона, составленная для системы при ее движении под действием основных сил, а функция H^* учитывает дополнительные (возмущающие) силы. Считая, что решения

$$\left.\begin{aligned} q_m &= q_m(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s), \\ p_m &= p_m(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — независимые постоянные, системы уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \dot{p}_m = -\frac{\partial H}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, s) \tag{9.18}$$

известны, будем искать решение системы уравнений (9.16) в форме (9.17), считая, что величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — функции времени. Предполагая, что уравнения (9.17) можно разрешить относительно величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_m &= \alpha_m(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s), \\ \beta_m &= \beta_m(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s) \end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Найдем производные от α_m и β_m по времени:

$$\dot{\alpha}_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_k} \dot{p}_k \right),$$

$$\dot{\beta}_m = \frac{\partial \beta_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial \beta_m}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \beta_m}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Учитывая уравнения (9.16), перепишем эти выражения в виде

$$\dot{\alpha}_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial \alpha_m}{\partial q_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_k} \right],$$

$$\dot{\beta}_m = \frac{\partial \beta_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial \beta_m}{\partial q_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \beta_m}{\partial p_k} \frac{\partial (H + H^*)}{\partial q_k} \right]$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Вспоминая определения и свойства скобок Пуассона (5.27), можем записать

$$\dot{\alpha}_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + (\alpha_m, H + H^*) = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + (\alpha_m, H) + (\alpha_m, H^*),$$

$$\dot{\beta}_m = \frac{\partial \beta_m}{\partial t} + (\beta_m, H + H^*) = \frac{\partial \beta_m}{\partial t} + (\beta_m, H) + (\beta_m, H^*)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Поскольку функции (9.19) при постоянных α_m и β_m является интегралами системы уравнений (9.18), то в силу условий (5.29) имеем

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + (\alpha_m, H) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

$$\frac{\partial \beta_m}{\partial t} + (\beta_m, H) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s),$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}_m &= (\alpha_m, H^*) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \alpha_m}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right),\\ \dot{\beta}_m &= (\beta_m, H^*) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \beta_m}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \beta_m}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right)\end{aligned}\right\} \quad (9.20)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s).$$

Уравнения (9.20) являются уравнениями возмущенного движения.

В § 6.1 было показано, что если можно найти решение

$$\psi = \psi(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$$

(где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — произвольные постоянные) уравнения Гамильтона — Якоби

$$H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_s \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (9.21)$$

то решением системы (9.18) будет

$$p_m = \frac{\partial \psi}{\partial q_m}, \quad \beta_m = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \quad (9.22)$$

в которых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — произвольные постоянные. Решая эти уравнения относительно q_m и p_m, мы и получим выражения (9.17).

Поскольку решение системы (9.16) ищется в форме (9.17), то, считая $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ функциями времени, выражения (9.17) можно рассматривать как преобразование переменных q_m и p_m системы (9.16) к новым переменным β_m и α_m. Покажем, что такое преобразование будет каноническим. Для этого нужно показать, что выражение (5.49), т. е.

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot{q}_m - (H + H^*) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_m \dot{\beta}_m - H' + \frac{dV}{dt}, \quad (9.23)$$

при выполнении условий (9.21) удовлетворяется тождественно. Выбрав функцию V в виде

$$V = \psi(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \sigma_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) - \sum_{m=1}^{s} \alpha_m \beta_m,$$

найдем

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_m}\dot q_m+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m}\dot\alpha_m\right)+\frac{\partial\psi}{\partial t}-\sum_{m=1}^{s}\dot\alpha_m\beta_m-\sum_{m=1}^{s}\alpha_m\dot\beta_m.$$

Подставляя эту производную в выражение (9.23) и учитывая условия (9.22), получим

$$-(H+H^*)=-H'+\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

т. е. преобразование будет каноническим, если новая функция Гамильтона равна

$$H'=H^*+H+\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Но в силу уравнения (9.21)

$$H+\frac{\partial\psi}{\partial t}=0,$$

и, следовательно, $H'=H^*$.

Таким образом, новые переменные будут удовлетворять каноническим уравнениям вида

$$\dot\alpha_m=-\frac{\partial H^*}{\partial\beta_m},\quad \dot\beta_m=\frac{\partial H^*}{\partial\alpha_m}$$

$$(m=1,\,2,\,\ldots,\,s). \qquad (9.24)$$

Пример 66. Движение материальной точки относительно вращающейся Земли *).

Будем считать Землю однородным шаром радиуса R. Пусть точка A на земной поверхности определяется полюсным углом ϑ_0 (рис. 9.3) и долготой λ_0. Исследование движения точки проведем относительно системы координат $Axyz$, у которой ось x направлена по касательной к меридиану на север, ось y — по касательной к параллели на запад и ось z — по направлению радиуса Земли от центра Земли.

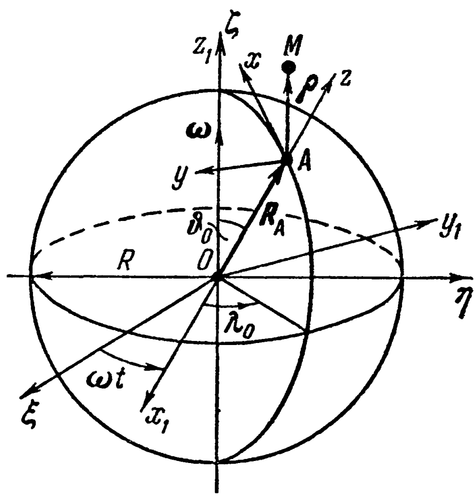

Рис. 9.3.

---

*) Этот пример в более общей постановке рассмотрен в книге А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961, стр. 565.

Скорость точки по отношению к инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$, имеющей начало в центре Земли, равна

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{v}_r,$$

где $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_A$ — скорость точки A, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость Земли, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор материальной точки, определяющий ее положение по отношению к точке A, $\boldsymbol{v}_r$ — скорость материальной точки по отношению к системе координат $Axyz$. Если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы системы координат $Axyz$, то

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{i}\omega \sin\vartheta_0 + \boldsymbol{k}\omega\cos\vartheta_0,$$

$$\boldsymbol{v}_A = -\boldsymbol{j}\omega R \sin\vartheta_0, \quad \boldsymbol{R}_A = R\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

и, следовательно,

$$v_x = \dot{x} - \omega y \cos\vartheta_0,$$
$$v_y = \dot{y} + \omega(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0) - \omega R\sin\vartheta_0,$$
$$v_z = \dot{z} + \omega y \sin\vartheta_0.$$

Принимая, что $m = 1$, получим следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}\{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \\ + 2\omega[(\dot{z}\sin\vartheta_0 - \dot{x}\cos\vartheta_0)y + \dot{y}(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0)] + \\ + \omega^2[y^2 + (x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0)^2]\}.$$

Отсюда имеем

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \omega y\cos\vartheta_0,$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \omega(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0) - \omega R\sin\vartheta_0,$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z} + \omega y\cos\vartheta_0.$$

Составим выражение для функции Гамильтона

$$H = \sum_{m=1}^{s} p_m\dot{q}_m - (T - \Pi),$$

где $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, Π — потенциальная энергия силы тяготения Земли. В нашем случае это будет

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\omega^2[y^2 + (x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0 - R\sin\vartheta_0)^2] + \Pi,$$

или

$$H = \frac{1}{2}\{(p_1 + \omega y \cos \vartheta_0)^2 + \\ + [p_2 + \omega R \sin \vartheta_0 - \omega (x \cos \vartheta_0 - z \sin \vartheta_0)]^2 + (p_3 - \omega y \sin \vartheta_0)^2\} - \\ - \frac{1}{2}\omega^2 [y^2 + (x \cos \vartheta_0 - z \sin \vartheta_0 - R \sin \vartheta_0)^2] + \Pi.$$

Если точка падает в пустоте без начальной скорости, то время ее падения измеряется несколькими секундами. Так, например, если высота $h = 1000$ *м*, то $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 14$ *сек*. Поэтому примем за малый параметр безразмерную величину $\mu = \omega t_1$, где ω — угловая скорость вращения Земли, равная $\omega \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx \frac{1}{13\,713}$ *). Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{13\,713} \cdot 14 \approx \frac{1}{1000}.$$

Функцию H теперь можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}\left\{\left(p_1 + \frac{\mu}{t_1} y \cos \vartheta_0\right)^2 + \right. \\ + \left[p_2 + \frac{\mu}{t_1} R \sin \vartheta_0 - \frac{\mu}{t_1}(x \cos \vartheta_0 - z \sin \vartheta_0)\right]^2 + \left(p_3 - \frac{\mu}{t_1} y \sin \vartheta_0\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{t_1^2}[y^2 + (x \cos \vartheta_0 - z \sin \vartheta_0 - R \sin \vartheta_0)^2] + \Pi.$$

Введем преобразование

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z,$$

$$p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2' - \omega R \cos \vartheta_0, \quad p_3 = p_3'.$$

Это преобразование является каноническим **). Произведя замену

---

*) Такой малый параметр использован А. Н. Крыловым (Собрание трудов академика, т. VIII, Изд-во АН СССР, 1950, стр. 330).

**) Рассмотрим преобразование

$$q_m = q_m', \quad p_m = p_m' + \frac{\partial V}{\partial q_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, s).$$

Покажем, что если в качестве функции V взять любую функцию от старых координат и времени, т. е.

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_s, t),$$

переменных и пренебрегая членами, содержащими множители μ^2, получим

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2\right) + \\ + \omega\left[\left(p_1' \cos\vartheta_0 - p_3' \sin\vartheta_0\right) y - p_2'\left(x\cos\vartheta_0 - z\sin\vartheta_0\right)\right] + \Pi.$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$\Pi = -\frac{gR^2}{r}.$$

Поскольку

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+R)^2}$$

и

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \ldots,$$

то получим *)

$$\frac{R}{r} = \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{z}{R} - \frac{x^2+y^2-2z^2}{2R^2} + \ldots.$$

Следовательно,

$$\Pi = -gR + gz + g\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R}.$$

то условие (5.49)

$$\sum_{m=1}^{s} p_m \dot q_m - H = \sum_{m=1}^{s} p_m' \dot q_m' - H' + \frac{dV}{dt}$$

будет выполнено тождественно. Используя рассматриваемое преобразование, получим

$$\sum_{m=1}^{s}\left(p_m' + \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)\dot q_m - H = \sum_{m=1}^{s} p_m' \dot q_m - H' + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{m=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_m}\dot q_m.$$

Это выражение выполняется тождественно, если

$$H' = H + \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Выбирая в рассматриваемой задаче за функцию

$$V = -\omega R y \sin\vartheta_0,$$

имеем: $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ и $H' = H$.

*) Мы ограничиваемся приведенными членами, считая, что точка движется вблизи поверхности Земли и, следовательно, z достаточно мало.

Итак, выражение для функции Гамильтона H принимает вид

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2\right)+\\+\omega\left[\left(p_1'\cos\vartheta_0-p_3'\sin\vartheta_0\right)y-p_2'(x\cos\vartheta_0-z\sin\vartheta_0)\right]+\\+gz+g\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R}=H_0+H^*,$$

где

$$H_0=\frac{1}{2}\left(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2+2gz\right),$$

$$H^*=\omega\left[\left(p_1'\cos\vartheta_0-p_3'\sin\vartheta_0\right)y-p_2'(x\cos\vartheta_0-z\sin\vartheta_0)\right]+\\+g\,\frac{x^2+y^2-2z^2}{2R}.$$

Решение уравнений Гамильтона

$$\dot p_m'=-\frac{\partial H_0}{\partial q_m},\quad \dot q_m=\frac{\partial H_0}{\partial p_m'}$$

имеет вид

$$p_1'=\alpha_1,\ p_2'=\alpha_2,\ p_3'=\alpha_3-gt,$$

$$x=\alpha_1t+\beta_1,\ y=\alpha_2t+\beta_2,\ z=\alpha_3t+\beta_3-\frac{gt^2}{2},$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — постоянные интегрирования.

Подставим теперь это решение в выражение функции H^*:

$$H^*=\omega\left\{\alpha_1(\alpha_2t+\beta_2)\cos\vartheta_0-(\alpha_3-gt)(\alpha_2t+\beta_2)\sin\vartheta_0-\right.\\\left.-\alpha_2\left[(\alpha_1t+\beta_1)\cos\vartheta_0-\left(\alpha_3t+\beta_3-\frac{gt^2}{2}\right)\sin\vartheta_0\right]\right\}+\\+\frac{g}{2R}\left[(\alpha_1t+\beta_1)^2+(\alpha_2t+\beta_2)^2-2\left(\alpha_3t+\beta_3-\frac{gt^2}{2}\right)^2\right].$$

Составим уравнения (9.24):

$$\dot\beta_1=\omega\beta_2\cos\vartheta_0+\frac{gt}{R}(\alpha_1t+\beta_1),$$

$$\dot\beta_2=\omega\beta_3\sin\vartheta_0-\omega\beta_1\cos\vartheta_0+\frac{1}{2}\omega gt^2\sin\vartheta_0+\frac{gt}{R}(\alpha_2t+\beta_2),$$

$$\dot\beta_3=-\omega\beta_2\sin\vartheta_0-\frac{2gt}{R}\left(\alpha_3t+\beta_3-\frac{gt^2}{2}\right),$$

$$\dot\alpha_1=\omega\alpha_2\cos\vartheta_0-\frac{g}{R}(\alpha_1t+\beta_1),$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\omega\alpha_1 \cos\vartheta_0 + \omega\alpha_3 \sin\vartheta_0 - \frac{g}{R}(\alpha_2 t + \beta_2) - \omega g t \sin\vartheta_0,$$

$$\dot{\alpha}_3 = -\omega\alpha_2 \sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_3 t + \beta_3 - \frac{1}{2} g t^2\right).$$

Решение этих уравнений проведем приближенным путем; заменяя в правых частях уравнений величины всех α и β их начальными значениями α_0 и β_0 и интегрируя, получим

$$\beta_1 = \beta_{10} + \omega t \beta_{20} \cos\vartheta_0 + \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^3}{3} + \beta_{10}\frac{t^2}{2}\right),$$

$$\beta_2 = \beta_{20} + \omega t \beta_{30} \sin\vartheta_0 - \omega\beta_{10} t \cos\vartheta_0 + \frac{1}{6}\omega g t^3 \sin\vartheta_0 + \\ + \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^3}{3} + \beta_{20}\frac{t^2}{2}\right),$$

. . . .

$$\alpha_3 = \alpha_{30} - \omega\alpha_{20} t \sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^2}{2} + \beta_{30} - \frac{1}{6} g t^3\right),$$

и, следовательно,

$$x = \beta_{10} + \alpha_{10} t + \omega(\beta_{20} t + \alpha_{20} t^2)\cos\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^3}{6} + \beta_{10}\frac{t^2}{2}\right),$$

$$y = \beta_{20} + \alpha_{20} t - \omega(\beta_{10} t + \alpha_{10} t^2)\cos\vartheta_0 + \omega(\beta_{30} t + \alpha_{30} t^2)\sin\vartheta_0 - \\ - \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^3}{6} + \beta_{20}\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\vartheta_0,$$

$$z = \beta_{30} + \alpha_{30} t - \omega(\beta_{20} t + \alpha_{20} t^2)\sin\vartheta_0 + \\ + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^3}{6} + \beta_{30}\frac{t^2}{2} - \frac{g t^4}{24}\right) - \frac{1}{2} g t^2.$$

После дифференцирования по времени получим

$$\dot{x} = \alpha_{10} + \omega(\beta_{20} + 2\alpha_{20} t)\cos\vartheta_0 - \frac{g}{R}\left(\alpha_{10}\frac{t^2}{2} + \beta_{10} t\right),$$

$$\dot{y} = \alpha_{20} - \omega(\beta_{10} + 2\alpha_{10} t)\cos\vartheta_0 + \omega(\beta_{30} + 2\alpha_{30} t)\sin\vartheta_0 - \\ - \frac{g}{R}\left(\alpha_{20}\frac{t^2}{2} + \beta_{20} t\right) - \omega g t^2 \sin\vartheta_0,$$

$$\dot{z} = \alpha_{30} - \omega(\beta_{20} + 2\alpha_{20} t)\sin\vartheta_0 + \frac{2g}{R}\left(\alpha_{30}\frac{t^2}{2} + \beta_{30} t - \frac{g t^3}{6}\right) - g t.$$

Пусть начальными условиями движения материальной точки будут: при $t=0$ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$. Тогда величины

α_{10}, α_{20}, α_{30}, β_{10}, β_{20}, β_{30} определятся из уравнений

$$x_0 = \beta_{10}, \quad y_0 = \beta_{20}, \quad z_0 = \beta_{30},$$
$$\dot{x}_0 = \alpha_{10} + \omega\beta_{20}\cos\vartheta_0,$$
$$\dot{y}_0 = \alpha_{20} - \omega\beta_{10}\cos\vartheta_0 + \omega\beta_{30}\sin\vartheta_0,$$
$$\dot{z}_0 = \alpha_{30} - \omega\beta_{20}\sin\vartheta_0.$$

Если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = h$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, то $\beta_{10} = 0$, $\beta_{20} = 0$, $\beta_{30} = h$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{20} = -\omega h \sin\vartheta_0$, $\alpha_{30} = 0$ и, с точностью до μ^2, имеем

$$x \approx 0, \quad y = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\vartheta_0,$$
$$z = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Формула для y дает восточное отклонение падающей без начальной скорости точки.

§ 9.4. Уравнения в вариациях

Рассматриваемый в этом параграфе метод позволяет изучать малые отклонения материальной системы от ее известного движения, которое называется *невозмущенным* движением. Эти отклонения (возмущения) могут быть вызваны, например, изменением начальных условий. Метод основан на составлении дифференциальных уравнений для возмущений, которые считаются малыми *).

Пусть рассматриваемая материальная система подчинена голономным стационарным связям, а q_1, q_2, ..., q_s — обобщенные координаты. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{9.25}$$

Пусть для невозмущенного движения решение известно:

$$q_m = f_m(t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s); \tag{9.26}$$

тогда для возмущенного движения

$$q_m = f_m(t) + x_m(t) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s), \tag{9.27}$$

где $x_m(t)$ — малые отклонения (возмущения) от невозмущенного движения. Так как кинетическая энергия

*) Этот метод развит Пуанкаре.

системы равна

$$T=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}A_{mk}\dot{q}_m\dot{q}_k, \tag{9.28}$$

то

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}=\sum_{k=1}^{s}A_{mk}\dot{q}_k \qquad (m=1,\ 2\ldots,\ s).$$

Подставляя в это выражение решение (9.27) и ограничиваясь в разложении по степеням x_m и $\dot{x}_m$ ($m=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ s$) членами, содержащими x_m и $\dot{x}_m$ в степени не выше первой, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}=\sum_{k=1}^{s}(A_{mk})_0\dot{f}_k+\sum_{k=1}^{s}(A_{mk})_0\dot{x}_k+\\+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mk}}{\partial q_j}\right)_0 x_j\dot{f}_k \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{9.29}$$

Индекс 0 означает, что в A_{mk} и производных от A_{mk} вместо f_m+x_m ($m=1,\ 2,\ \ldots,\ s$) подставлено f_m. Далее имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)=\sum_{k=1}^{s}(A_{mk})_0\ddot{f}_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{d(A_{mk})_0}{dt}\dot{f}_k+\\+\sum_{k=1}^{s}(A_{mk})_0\ddot{x}_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{d(A_{mk})_0}{dt}\dot{x}_k+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mk}}{\partial q_j}\right)_0\dot{x}_j\dot{f}_k+\\+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}x_j\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial A_{mk}}{\partial q_j}\right)_0\dot{f}_k\right] \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{9.30}$$

В соответствии с выражением (9.28)

$$\frac{\partial T}{\partial q_m}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

После замены $\dot{q}_j$ и $\dot{q}_k$ их выражениями (9.27) и разложения по степеням x_j и $\dot{x}_k$ ($j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$) будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial q_m}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)_0\dot{f}_j\dot{f}_k+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)_0\dot{f}_j\dot{x}_k+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 A_{j\nu}}{\partial q_k\,\partial q_m}\right)_0 x_k\dot{f}_j\dot{f}_\nu \quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s) \qquad (9.31)$$

(с точностью до членов с x_j и $\dot{x}_k$ в первой степени). Для обобщенных сил разложение по степеням x_m и $\dot{x}_m$ ($m=1,\ 2,\ \ldots,\ s$) с точностью до членов с x_m и $\dot{x}_m$ в первой степени имеет вид

$$Q_m(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_s,\ t)=$$
$$=Q_{m0}+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_k}\right)_0 x_k+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_m}{\partial \dot{q}_k}\right)_0\dot{x}_k \qquad (9.32)$$
$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Так как $q_m=f_m(t)$ являются решениями уравнений (9.25), то справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{s}(A_{mk})_0\ddot{f}_k+\sum_{k=1}^{s}\frac{d\,(A_{mk})_0}{dt}\dot{f}_k-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)_0\dot{f}_j\dot{f}_k=Q_{m0} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (9.33)$$

Подставляя теперь выражения (9.30), (9.31) и (9.32) в уравнения (9.25) и учитывая тождество (9.33), получим

$$\sum_{k=1}^{s}a_{mk}\ddot{x}_k+\sum_{k=1}^{s}b_{mk}\dot{x}_k+\sum_{k=1}^{s}c_{mk}x_k+\sum_{k=1}^{s}d_{mk}\dot{x}_k=0, \qquad (9.34)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_{mk} = (A_{mk})_0, \quad b_{mk} = \frac{d(A_{mk})_0}{dt} - \left(\frac{\partial Q_m}{\partial \dot{q}_k}\right)_0, \\ &c_{mk} = \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial A_{mj}}{\partial q_k}\right)_0 \dot{f}_j\right] - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 A_{j\nu}}{\partial q_k\,\partial q_m}\right)_0 \dot{f}_j\dot{f}_\nu - \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_k}\right)_0, \\ &d_{mk} = \sum_{j=1}^{s}\dot{f}_j\left[\left(\frac{\partial A_{mj}}{\partial q_k}\right)_0 - \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)_0\right] \\ &\qquad (m = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, s). \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

Система из s линейных уравнений (9.34) называется уравнениями возмущенного движения или уравнениями в вариациях. Если невозмущенное движение таково, что коэффициенты уравнений (9.34) постоянны, то это движение называется стационарным. Для стационарного движения справедливо

$$a_{mk} = a_{km}, \quad b_{mk} = -\left(\frac{\partial Q_m}{\partial \dot{q}_k}\right)_0,$$

$$c_{mk} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mj}}{\partial q_k}\right)_0 \ddot{f}_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 A_{j\nu}}{\partial q_k\,\partial q_m}\right)_0 \dot{f}_j\dot{f}_\nu - \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_k}\right)_0,$$

$$\frac{d}{dt}(d_{mk}) = \sum_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{\partial A_{mj}}{\partial q_k}\right)_0 - \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)_0\right]\ddot{f}_j = 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Из последнего равенства следует:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{mj}}{\partial q_k}\right)_0 \ddot{f}_j = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m}\right)\ddot{f}_j \tag{9.36}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, s).$$

Слагаемые $\sum_{k=1}^{s} d_{mk}\dot{x}_k$ в уравнении (9.34) являются *гироскопическими членами*, так как коэффициенты d_{mk} обладают следующими свойствами:

$$d_{mm}=0,\ d_{mk}=-d_{km}\quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Полученные нами уравнения возмущенного движения обычно используются для суждений об устойчивости невозмущенного движения *).

Пример 67. В примере 30, § 3.8, было получено выражение для кинетической энергии свободного гироскопа в кардановом подвесе:

$$T=\frac{1}{2}I_{\text{н}z_1}\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}\left(I_{\text{в}x}\omega_{\text{в}x}^2+I_{\text{в}y}\omega_{\text{в}y}^2+I_{\text{в}z}\omega_{\text{в}z}^2\right)+\frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2\right).$$

Учитывая, что

$$\omega_{\text{в}x}=-\dot{\psi}\sin\vartheta,\ \omega_{\text{в}y}=\dot{\vartheta},\ \omega_{\text{в}z}=\dot{\psi}\cos\vartheta,$$
$$\omega_x=\dot{\varphi}-\dot{\psi}\sin\vartheta,\ \omega_y=\dot{\vartheta},\ \omega_z=\dot{\psi}\cos\vartheta,$$

а также что $I_{\text{в}x}=I_{\text{в}y}$ и $I_y=I_z$, получим

$$T=\frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{\psi}^2+A_{22}\dot{\vartheta}^2+A_{33}\dot{\varphi}^2+2A_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi}\right),$$

где

$$A_{11}=I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_y+\left(I_{\text{в}x}-I_{\text{в}z}-I_y\right)\sin^2\vartheta+I_x\sin^2\vartheta,$$
$$A_{22}=I_{\text{в}x}+I_y=I_2,\ A_{33}=I_x,\ A_{13}=-I_x\sin\vartheta.$$

Уравнения движения в случае отсутствия внешних сил имеют вид

$$\left[I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_y+\left(I_{\text{в}x}-I_{\text{в}z}-I_y\right)\sin^2\vartheta\right]\ddot{\psi}-I_x(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\sin\vartheta)\dot{\vartheta}\cos\vartheta-$$
$$-2\left(I_{\text{в}z}+I_y-I_{\text{в}x}\right)\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta=0,$$
$$I_2\ddot{\vartheta}+I_x(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\sin\vartheta)\dot{\psi}\cos\vartheta+\left(I_{\text{в}z}+I_y-I_{\text{в}x}\right)\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left[I_x(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\sin\vartheta)\right]=0.$$

За частное решение этих уравнений (невозмущенное движение) может быть взято $\psi=\psi_0$, $\vartheta=\vartheta_0$, $\varphi=\omega t$, где $\omega=\text{const}$. Таким образом, $f_1=\psi_0$, $f_2=\vartheta_0$, $f_3=\omega t$. Согласно формулам (9.35) имеем

$$a_{11}=I_{\text{н}z_1}+I_{\text{в}z}+I_y+\left(I_{\text{в}x}-I_{\text{в}z}-I_y\right)\sin^2\vartheta_0+I_x\sin^2\vartheta_0=I_1,$$
$$a_{22}=I_2,\ a_{33}=I_x,\ a_{13}=-I_x\sin\vartheta_0,$$
$$a_{12}=-\omega I_x\cos\vartheta_0,\ a_{21}=\omega I_x\cos\vartheta_0.$$

*) Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье, Теоретическая механика, ч. III, ГТТИ, 1934, стр. 550.

Остальные коэффициенты равны нулю. Так как $q_1 = \psi_0 + x_1$, $q_2 = \vartheta_0 + x_2$, $q_3 = \omega t + x_3$, то уравнения возмущенного движения (9.34) представятся в виде

$$I_1\ddot{x}_1 - I_x\omega\dot{x}_2\cos\vartheta_0 = 0,$$
$$I_2\ddot{x}_2 + I_x\omega\dot{x}_1\cos\vartheta_0 = 0,$$
$$\dot{x}_3 - \dot{x}_1\sin\vartheta_0 = c,$$

где c — постоянная. Решение этих уравнений имеет вид:

$$x_1 = c_1 + c_2\cos kt + c_3\sin kt,$$
$$x_2 = c_4 + \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\,(c_2\sin kt - c_3\cos kt),$$
$$x_3 = ct + (c_2\cos kt + c_3\sin kt)\sin\vartheta_0 + c',$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c' — постоянные интегрирования, а

$$k = \frac{I_x\omega}{\sqrt{I_1I_2}}\cos\vartheta_0.$$

При начальных условиях: при $t = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$, $\dot{x}_3 = 0$, т. е. при ударе по внутренней рамке, получим,

$$x_1 = \frac{I_2\dot{x}_{20}}{I_x\omega\cos\vartheta_0}(\cos kt - 1),$$
$$x_2 = \frac{\dot{x}_{20}\sqrt{I_1I_2}}{I_x\omega\cos\vartheta_0}\sin kt,$$
$$x_3 = \frac{I_2\dot{x}_{20}}{I_x\omega}\operatorname{tg}\vartheta_0\cos kt.$$

Из этих выражений видно, что возмущенное движение по каждой координате представляет собой гармоническое колебание (нутационные колебания) *). Если ω достаточно велико, то амплитуды этих колебаний малы.

---

*) Если рассматривать нелинейную задачу, учитывая члены с x_k и $\dot{x}_k$ в степени выше первой, то можно обнаружить систематические уходы гироскопа, т. е. появление в решении членов, пропорциональных времени. Эта неустойчивость гироскопа была впервые обнаружена Е. Я. Николаи. Подробности исследования этого вопроса можно найти в книге: Я. Л. Лунц, Ошибки гироскопических приборов, Судостроение, 1968.